19. Az egységkör konform automorfizmusai

Konform megfeleltetések. Az egységkör 0-t fixen hagyó automorfizmusai a forgatások. A $\frac{z \pm a}{1 \pm \bar{a}z}$ alakú lineáris törtfüggvények. Az egységkörlemez konform automorfizmusai. A körlemezek és félsíkok konform ekvivalensek, és közöttük minden konform megfeleltetés lineáris törtfüggvény. Az $\frac{z \pm a}{1 \pm \bar{a}z}$ alakú törtek kiemelése az egségkörben holomorf függvényekből. Véges és végtelen Blaschke-szorzatok.

Definíció

Legyen D_1 és D_2 két tartomány és $f : D_1 \to D_2$.
Az $f(z)$ *konform*, ha holomorf és lokálisan injektív (vagyis a deriváltja nem 0).
Az $f(z)$ *biholomorf*, ha holomorf és bijektív. (Ebből következik, hogy az inverze is holomorf.)

Megjegyzés. *Ha $f : D_1 \to D_2$ bijektív, akkor nincs különbség. A magyar nyelvű könyvek egyszerűen csak konform(is) megfeleltetésnek nevezik a biholomorf $f : D_1 \to D_2$ bijekciókat.*

(Eredetileg a "konform" szögtartót jelent: differenciálható, lokálisan injektív és szögtartó.)

Definíció

Két tartomány, D_1 és D_2 *konform ekvivalens*, ha létezik közöttük konform megfeleltetés, vagyis biholomorf bijekció.
Az $D \to D$ konform megfeleltetéseket D konform automorfizmusainak nevezzük.

Tétel

Az egységkörlemeznek a 0-t fixen tartó konform automorfizmusai a forgatások.

Bizonyítás. A forgatások persze automorfizmusok; a megfordítás (a "csak") a kérdés.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa az egységkörnek, és $f(0) = 0$.

A Schwarz-lemma szerint $|f'(0)| \leqslant 1$, és egyenlőség csak akkor lehet, ha $f(z)$ forgatás.

Legyen $g = f^{-1}$. Ez is konform automorfizmus és $g(0) = 0$, tehát $|g'(0)| \leqslant 1$.

Az inverz függvény differenciálási szabálya miatt $f'(0) \cdot g'(0) = 1$.

Mindez csak úgy lehetséges, ha $|f'(0)| = |g'(0)| = 1$, és f és g is forgatás.

Lemma

Legyen $|a| < 1$ és

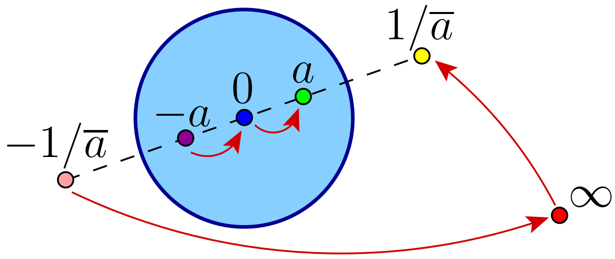
$$\varphi(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z}.$$

A $\varphi(z)$ függvény konform automorfizmusa az egységkörlemeznek, $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$.

Az inverze:

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

Bizonyítás. $\varphi(-a) = 0$ és $\varphi(0) = a$ triviális. Továbbá $\varphi(-1/\overline{a}) = \infty$ és $\varphi(\infty) = 1/\overline{a}$.



Az egységkörvonalon $|z| = 1$ és $|1 + \overline{a}z| = |\overline{z}z + \overline{a}z| = |\overline{z} + \overline{a}| = |z + a|$, tehát $|\varphi(z)| = 1$; a körvonal képe önmaga.

A függvény a 0 belső pontot az a belső pontba képezi, tehát a körlemezt a körlemezbe.

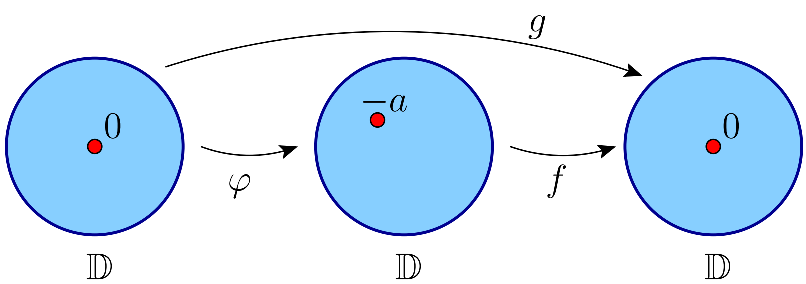
Az inverzt akár ki is lehet számolni, de 4 pont képét is ellenőrizhetjük: $\varphi^{-1}(a) = 0$, $\varphi^{-1}(0) = -a$; a tükörképekre $\varphi^{-1}(1/\overline{a}) = \infty$, $\varphi^{-1}(\infty) = -1/\overline{a}$.

Tétel

Az egységkör konform automorfizmusai az $\varepsilon\dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}$ alakú lineáris törtfüggvények,
ahol $|a| < 1$ és $|\varepsilon| = 1$.

Bizonyítás. Trivi irány: az ilyenek tényleg konform automorfizmusok.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ konform automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, és $f^{-1}(0) = -a$.



Legyen $\varphi(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$.

A $g = f \circ \varphi$ egy olyan automorfizmusa $\mathbb{D}$-nek, amelyre $g(0) = f(\varphi(0)) = f(-a) = 0$.

Tehát g egy forgatás, $g(z) = \varepsilon z$ valamilyen egységnyi ε-nal.

$$f(z) = g(\varphi^{-1}(z)) = \varepsilon \cdot \varphi^{-1}(z) = \varepsilon \cdot \frac{z+a}{1+\overline{a}z}.$$

Tétel

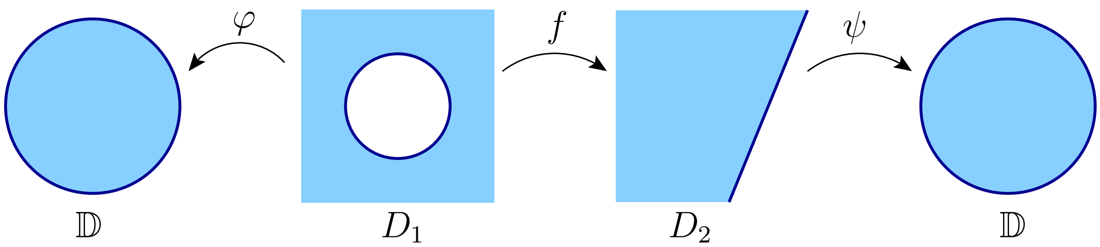
- Bármely két körlemez vagy félsík konform ekvivalens. (Megengedhetjük körvonal külsejét is.)
- Bármely két körlemez vagy félsík közötti konform megfeleltetés lineáris törtfüggvény.

Bizonyítás. (a) Elég azt igazolni, hogy bármely zárt körlemez vagy félsík konform ekvivalens az egységkörlappal. A félsíkokat és körök külsejét alkalmas tükrözött inverzióval körlapba képezhetjük, majd alkalmazunk egy eltolást és nagyítást.

Az így kapott leképezés lineáris törtfüggvény.

(b) Tegyük fel, hogy f konform megfeleltetés a D_1 és D_2 körlemezek vagy félsíkok között.

Legyen $\phi : D_1 \to \mathbb{D}$ és $\psi : D_2 \to \mathbb{D}$ egy-egy lineáris törtfüggvény, amely megfeleltetés az egységkörrel.



A $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ az egységkörnek konform automorfizmusa, tehát lineáris törtfüggvény.

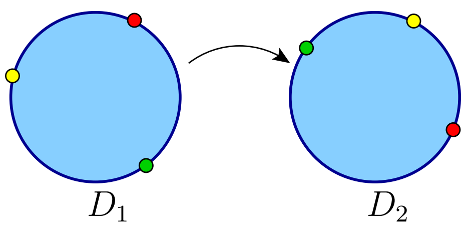
Akkor viszont $f = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ is lineáris törtfüggvény.

Tétel

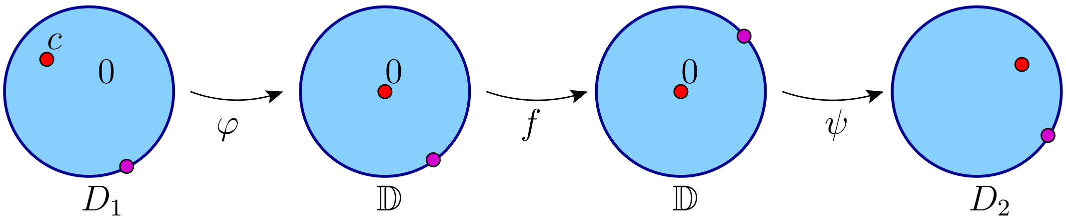
Egy konform leképezést két körlemez között egyértelműen meghatároz

- Három határpont képe (azonos körüljárással);
- Egy belső pont és egy határpont képe;
- Egy belső pont képe, és ott a derivált iránya. (A derivált abszolút értéke egyértelmű.)

Bizonyítás. (a) A 3 pont meghatározza a kört; a sorrend meghatározza, hogy a kép kívül van, vagy belül.



(b) Elég az egységkörlemezre bizonyítani; $\dfrac{z+a}{1-\bar{a}z}$ alakú függvényekkel kombinálva elérhetjük, hogy a megadott pont és a képe is a 0 legyen; utána a megadott határpont megmondja, hogy melyik forgatásról van szó.



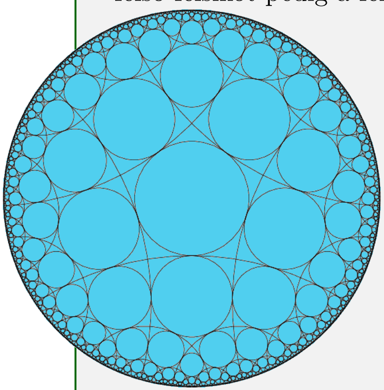
(c) Ugyanaz, mint a (b), csak a forgatást nem egy határpont, hanem derivált iránya mondja meg:

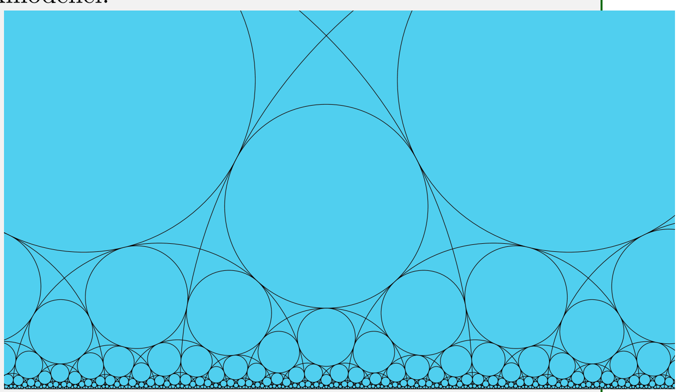
$$\big(\psi \circ f \circ \varphi\big)'(c) = \psi'(0) \cdot f'(0) \cdot \varphi'(c).$$

Gyöktényezők és Baschke-szorzatok

Mese

Az egységkörlemezt szeretjük azonosítani a Poincaré-féle körmodellel, a felső félsíkot pedig a félsíkmodellel.





A konform automorfizmusok a modellek irányítástartó egybevágóságai.

Lemma

Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkörlemezen, egy gyöke a. Legyen $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1-\overline{a}z}{z-a}$. Ez a függvény szintén holomorf (az a-ban megszüntethető szingularitása van), és $\sup_{\mathbb{D}} |g| = \sup_{\mathbb{D}} |f|$.

Bizonyítás. A maximum-elv miatt

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{és} \quad \sup_{\mathbb{D}} |g| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)|.$$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \leqslant \Big(\max_{|z|=r} |g(z)| \Big),$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \leqslant \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Ha $|z| \to 1-$, akkor $\left| \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \to 1$ egyenletesen, ezért

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| g(z) \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right| \geqslant \max_{|z|=r} |g(z)| \cdot \min_{|z|=r} \left| \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right|,$$

$$\sup_{\mathbb{D}} |f| = \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |f(z)| \geqslant \lim_{r\to 1-} \max_{|z|=r} |g(z)| = \sup_{\mathbb{D}} |g|.$$

Következmény

Az egységkörben holomorf függvényekből kiemelhetők az $\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ alakú "gyöktényezők" úgy, hogy a függvény szuprémuma nem változik meg.
Ha n gyök van: $a_1, \ldots, a_n$, akkor kiemelhetjük a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}$$

szorzatot.

Az ilyen típusú szorzatokat *véges Blaschke-szorzat*oknak nevezzük.

Ugyanígy pólusokat is megszüntethetünk az $\dfrac{1-\bar{a}z}{z-a}$ alakú törtek kiemelésével.

Polinomok és Blaschke-szorzatok

Sok, a síkon polinomokra vagy egészfüggvényekre vonatkozó tétel átírható a körmodellre és Blaschke-szorzatokra.

Polinom	**véges Blaschke-szorzat**
$c \cdot \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)$	$\varepsilon \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}$
(a sík irányítástartó egybevágóságainak szorzata)	(a körmodell irányítástartó egybevágóságainak szorzata)
Pl. Gauss–Lucas tétel: Ha f legalább másodfokú polinom, akkor f gyökeinek konvex burka tartalmazza f' gyökeit.	Ha f legalább kéttényezős Blaschke-szorzat, akkor f gyökeinek a körmodellben vett konvex burka tartalmazza f'-nek az egységkörbe eső gyökeit.
Pl. A polinomok jellemzése: ha $f(z)$ egészfüggvény, és $\lim\limits_{z\to\infty} = \infty$, akkor $f(z)$ polinom.	Ha $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorf, és $\lim\limits_{\lvert z\rvert \to 1-0} \lvert f(z)\rvert = 1$, akkor $f(z)$ véges Blaschke-szorzat.

Végtelen Blaschke-szorzatok

Végtelen sok Blaschke-tényező esetén biztosítani kell a konvergenciát. Ezt úgy oldjuk meg, hogy a 0-beli értékeket pozitív valós irányba fordítjuk (kivéve a $\frac{z-0}{1-0z}$ tényezőt):

$$z^m \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{|a_k|}{a_k} \cdot \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z} \right).$$

Ettől legalább a 0-ban konvergens, és tetszés szerint átrendezhető a szorzat.

Tétel (végtelen Blaschke-szorzat konvergenciája)

- A Blaschke-szorzat lokálisan egyenletesen konvergens.
- Ha $\sum_{k=1}^{\infty} \big(1 - |a_k|\big) = \infty$, akkor Blaschke-szorzat a konstans 0.
- Ha $\sum_{k=1}^{\infty} \big(1 - |a_k|\big) < \infty$, akkor Blaschke-szorzat nem a konstans 0, és a gyökei $a_1, a_2, \ldots$, továbbá $m > 0$ esetén a 0.