20. Riemann-alaptétel

Riemann-alaptétel. Bármely két, a teljes síktól különböző, egyszeresen összefüggő tartomány konform ekvivalens. A teljes sík nem konform ekvivalens az egységkörlemezzel. Hurwitz-tétel. Injektív függvények lokálisan egyenletes limesze. A Riemann-alaptétel bizonyítása.

Tétel (a konform leképezések alaptétele; Riemann-alaptétel)

Legyen $D \neq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $z_0 \in D$. Ekkor létezik egy egyértelmű $f : D \to \mathbb{D}$ konform megfeleltetés, amelyre $f(z_0) = 0$ és $f'(z_0)$ pozitív valós.

Következmény

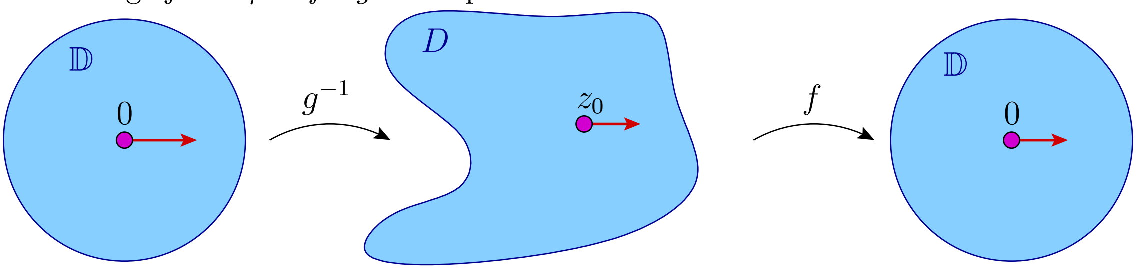
Bármely két, a teljes síktól különböző, egyszeresen összefüggő tartomány konform ekvivalens.

Megjegyzés. *A tételben a kivétel a teljes sík. A teljes sík nem konform ekvivalens az egységkörrel, mert ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ holomorf, akkor a Liouville-tétel miatt csak konstans lehet.*

Az egyértelműség bizonyítása

Tegyük fel, hogy $f(z)$ és $g(z)$ olyan $D :\to \mathbb{D}$ konform megfeleltetések, amelyekre $f(z_0) = g(z_0) = 0$, valamint $f'(z_0)$ és $g'(z_0)$ is pozitív valós. Azt kell igazolnunk, hogy $f = g$.

Vizsgáljuk a $\varphi = f \circ g^{-1}$ leképezést.



- A φ konform automorfizmusa egységkörnek,
- $\varphi(0) = 0$, és
- $\varphi'(0) = f'(z_0) \cdot \left(g^{-1}\right)'(0) = f'(z_0) \cdot \dfrac{1}{g'(z_0)}$ pozitív valós.

Ez egyértelműen meghatározza a φ konform automorfizmust: $\varphi(w) = w$, vagyis $f = g$.

A megfeleltetés létezésnek bizonyítása

A fő ötletet a Schwarz-lemmából merítjük.

Legyen

$$\mathcal{F}_0 = \Big\{ f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \text{ holomorf, } f(0) = 0 \Big\}.$$

A Schwarz-lemma szerint:

- Bármely $f \in \mathcal{F}_0$ esetén $|f'(0)| \leqslant 1$.
- Bármely $f \in \mathcal{F}_0$ akkor és csak akkor automorfizmusa az egységkörnek, ha $|f'(0)| = 1$.

Tehát: $f \in \mathcal{F}_0$ akkor és csak akkor konform automorfizmus, ha $|f'(0)|$ maximális.

Definíció

A Riemann-alaptétel bizonyításához legyen

$$\mathcal{F} = \Big\{ f : D \to \mathbb{D} \text{ holomorf és injektív, } f(z_0) = 0,\ f'(z_0) \text{ pozitív valós} \Big\}.$$

Olyan $f_0 \in \mathcal{F}$ függvényt fogunk választani, amelyre $f_0'(z_0)$ maximális.

Segédtételek

Lemma (a logaritmus- és a hatványfüggvények létezése)

Ha D egyszeresen összefüggő, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorf és $f \neq 0$, akkor D-n létezik $\log f$-nek és minden α-ra f^α-nak holomorf ága D-n.

Lemma (Weierstrass-tétel)

Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f_1, f_2, \ldots : D \to \mathbb{C}$ holomorfak és $f_n(z) \to g(z)$ lokálisan egyenletesen, akkor g holomorf és $f_n'(z) \to g'(z)$ lokálisan egyenletesen.

Lemma (Vitali–Motel tétel)

Ha $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f_1, f_2, \ldots : D \to \mathbb{C}$ holomorfak, és egyenletesen korlátosak, akkor kiválasztható közülük lokálisan egyenletesen konvergens részsorozat.

Lemma (Hurwitz-tétel)

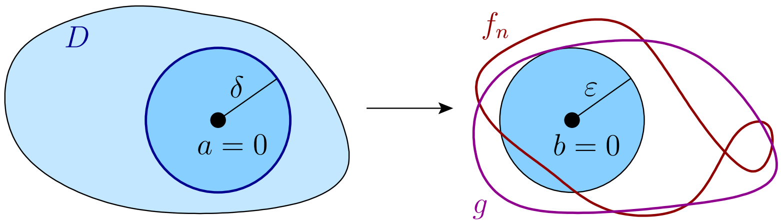
Tfh. $g, f_1, f_2, \ldots$ holomorf a D tartományon, $f_n \to g$ lokálisan egyenletesen, $a \in D$ és $b = g(a)$. Ekkor g vagy konstans, vagy az a bármilyen kis környezetében, elég nagy n-re az $f_n(z)$ függvény felveszi a b értéket:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \exists w \in B(a, \delta) \cap D \quad f_n(w) = b.$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy $a = b = 0$.

Legyen δ_0 olyan sugár, hogy $\overline{B}(0, \delta_0) \subset D$, és a $0 < |z| \leqslant \delta_0$ körlapon $g \neq 0$. Ha ilyen sugár nincs, akkor g gyökei torlódnak a 0-ban, de akkor az unicitástétel miatt g konstans.

Tekintsünk egy tetszőleges $0 < \delta < \delta_0$-t, és legyen $\varepsilon = \min\limits_{|z|=\delta} \big|g(z)\big|$.



Az egyenletes konvergencia miatt van olyan n_0, hogy minden $n > n_0$-ra, a $|z| = \delta$ körvonalon

$$\big|g(z) - f_n(z)\big| < \varepsilon \leqslant \big|g(z)\big|.$$

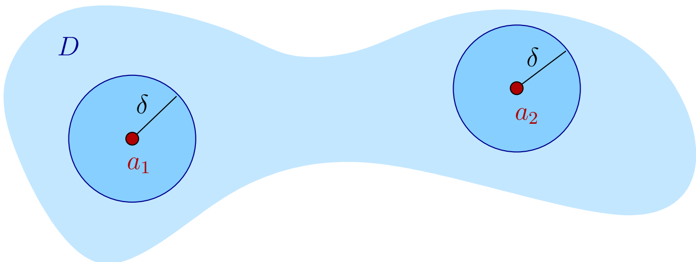
A Rouché-tétel miatt a $|z| < \delta$ körben a $f_n(z)$ függvénynek ugyanannyi gyöke van, mint a $g(z)$ függvénynek, vagyis legalább egy.

Következmény

Injektív függvények lokálisan egyenletes limesze vagy konstans, vagy injektív: ha $g, f_1, f_2, \ldots$ holomorf a D tartományon, mindegyik f_n injektív és $f_n \to g$ lokálisan egyenletesen, akkor g vagy konstans, vagy injektív.

Bizonyítás. ↯ Tegyük fel, hogy g nem konstans, és nem is injektív.

Legyen $a_1, a_2 \in D$ két különböző pont D-ben, amelyekre $g(a_1) = g(a_2) = b$.



Válasszunk olyan δ-t, amelyre a $B(a_1, \delta)$ és $B(a_2, \delta)$ diszjunktak, és részei D-nek.

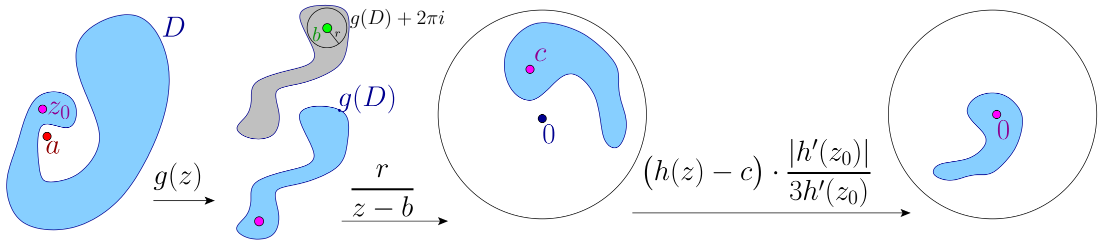
A Hurwitz-tétel miatt vannak olyan n_1 és n_2 küszöbindexek, hogy $n > n_1$ esetén $b \in f_n\big(B(a_1, \delta)\big)$ és $n > n_2$ esetén $b \in f_n\big(B(a_2, \delta)\big)$.

Ha $n > \max(n_1, n_2)$, akkor $f_n(z)$ mindkét körlapon felveszi a b értéket; de ez ellentmond annak, hogy f_n injektív. ↯

A Riemann-alaptétel bizonyítása, 1. lépés

1 Állítás. *A* $\mathcal{F} = \Big\{ f : D \to \mathbb{D}$ *holomorf és injektív,* $f(z_0) = 0,\ f'(z_0)$ *pozitív valós* $\Big\}$ *halmaz nem üres.*

Bizonyítás.



$D \neq \mathbb{C}$, vagyis van olyan a komplex szám, amelyre $a \notin D$. Legyen $g(z) = \log(z-a)$ a logaritmus valamelyik holomorf ágával. Bármely számnak legfeljebb egy logaritmusát veszi fel g, tehát g-nek nem lehet értéke a $g(D)+2\pi i$ halmazban. Ez a halmaz nyílt; legyen $B(b,r)$ egy körlap a $g(D)+2\pi i$ halmazban; ekkor tehát $|g(z)-b| \geqslant r$.

Ezek után legyen $h(z) = \dfrac{r}{g(z)-b}$; erre $|h| \leqslant 1$. A h injektív, tehát a deriváltja nem nulla.

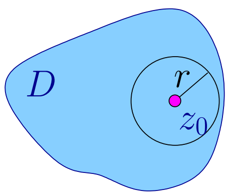
Legyen $c = h(z_0)$ és $f(z) = \big(h(z)-c\big) \cdot \dfrac{|h'(z_0)|}{h'(z_0)} \cdot \dfrac{1}{3}$. Erre a függvényre $|f(z)| \leqslant \big(|h(z)|+c\big) \cdot \frac{1}{3} < 1$, $f(z_0) = 0$ és $f'(z_0) = \dfrac{|h'(z_0)|}{3}$, ami pozitív valós. Tehát, $f \in \mathcal{F}$.

2. lépés

2 Állítás. *Legyen* $M = \sup\big\{f'(0) : \ f \in \mathcal{F}\big\}$. *Ekkor* $0 < M < \infty$.

Bizonyítás. Az $\mathcal{F}$ nemüres, van olyan f eleme, amelyre $f'(z_0) > 0$; ezért $M \geqslant f'(z_0) > 0$.

Az z_0 belső pontja D-nek; legyen $r > 0$ olyan, hogy $\overline{B}(z_0, r) \subset D$.



Bármely $f \in \mathcal{F}$ esetén $|f| < 1$, így

$$f'(z_0) = |f'(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^2} \cdot 2\pi r = \frac{1}{r},$$

ezért $M \leqslant \dfrac{1}{r}$.

3. lépés

3 Állítás. *Van olyan* $f_0 \in \mathcal{F}$, *amelyre* $f_0'(z) = M$. *Vagyis,* $M = \max\big\{f'(0) : \ f \in \mathcal{F}\big\}$.

Bizonyítás. A szuprémumhoz tarthatunk alulról, így biztosan vannak olyan $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{F}$ függvények, amelyekre $f_n'(z_0) \nearrow M$.

Ezek a függvények az egységkörbe képeznek, ezért egyenletesen korlátosak. A Vitali–Montel tétel szerint kiválasztható közülük egy lokálisan egyenletesen konvergens $f_{n_1}, f_{n_2} \ldots$ részsorozat. Ennek limesze legyen f_0.

A Weierstrass-tétel miatt $f_0 = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}$ holomorf, és $f'_{n_k} \to f'_0$ lokálisan egyenletesen; speciálisan a z_0 pontban $f'_0(z_0) = \lim f'_{n_k}(z_0) = M$.

Az f_0 az f_{n_k} injektív függvények lokálisan egyenletes limesze, tehát f_0 vagy konstans, vagy pedig injektív. De az f_0 nem lehet konstans, mert például $f'_0(z_0) = M > 0$. Tehát f_0 injektív.

Mivel $|f_n| < 1$, az biztos, hogy $|f_0| = \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}| \leqslant 1$; de mivel f_0 nem konstans, a maximum-elv miatt (vagy a nyílt leképezés tétele miatt) az is igaz, hogy $|f_0| < 1$.

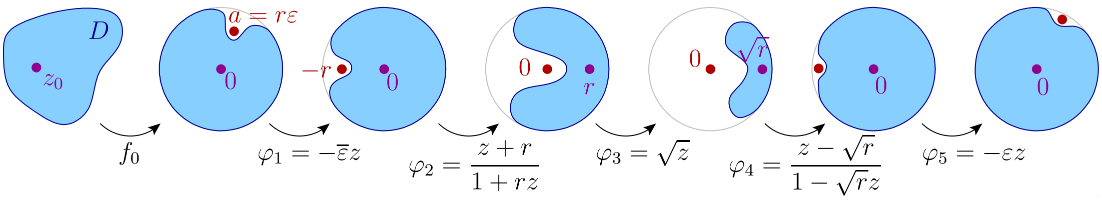
Ezek után $f_0 : D \to \mathbb{D}$ holomorf és injektív, és $f'_0(z_0) = M$.

4. (utolsó) lépés

4 Állítás. *f_0 szürjektív: $f_0(D) = \mathbb{D}$.*

Bizonyítás. ↯ Tegyük fel, hogy f_0 nem szürjektív; van egy olyan $a \in \mathbb{D}$ érték, amit nem vesz fel. Az a nem lehet a 0, mert $f_0(z_0) = 0$. Írjuk a-t $r\varepsilon$ alakban, ahol $0 < r < 1$ és ε egységnyi komplex szám.

Legyen $g(z)$ a következő leképezéseknek a kompozíciója:



$\varphi_1(z) = -\bar{\varepsilon} z$; ez az a-t a $(-r)$ pontba forgatja.

$\varphi_2(z) = \frac{z+r}{1+rz}$; a $\mathbb{D}$ automorfizmusa, a $(-r)$ képe a 0, a 0 képe az r.

φ_3 a $\varphi_2(\varphi_1(f_0(D)))$ halmazon a $\sqrt{z}$-nek az a holomorf ága, amely r-et $\sqrt{r}$-be képezi. A $\varphi_2(\varphi_1(f_0(D)))$ halmaz egyszeresen összefüggő, nyílt, nem tartalmazza a 0-t, így létezik rajta $\sqrt{z}$.

$\varphi_4(z) = \frac{z-\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}z}$; a $\mathbb{D}$ automorfizmusa, a $\sqrt{r}$ képe a 0.

$\varphi_5(z) = -\varepsilon z$; az első forgatás inverze.

Ezek kompozíciója, a $g = \varphi_5 \circ \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ f_0$ függvény is holomorf és injektív $D \to \mathbb{D}$ leképezés, $g(z_0) = 0$.

A φ_3 inverze a z^2, kiterjeszthető az egész egységkörre. A

$$h = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_3^{-1} \circ \varphi_4^{-1} \circ \varphi_5^{-1}$$

egy holomorf $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ függvény, de nem injektív.

A Schwarz-lemma miatt $|h'(0)| < 1$, tehát

$$|g'(z_0)| = \left|\frac{f'_0(z_0)}{h'(0)}\right| > \frac{M}{1} = M. \qquad ↯$$

Alternatív befejezés:

A $g = \varphi_5 \circ \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ f_0$ függvény deriváltját közvetlenül is kiszámolhatjuk.

- $f'_0(z_0) = M$;
- $\varphi'_1(0) = -\bar{\varepsilon}$;

- $\varphi_2'(z) = \dfrac{1\cdot(1+rz) - r\cdot(z+r)}{(1+rz)^2} = \dfrac{1-r^2}{(1+rz)^2}$, tehát $\varphi_2'(0) = 1 - r^2 = (1+r)(1-r)$;
- $\varphi_3'(r) = \dfrac{1}{2\sqrt{r}}$;
- $\varphi_4'(z) = \dfrac{1\cdot(1-\sqrt{r}z) + \sqrt{r}\cdot(z-\sqrt{r})}{(1-\sqrt{r}z)^2} = \dfrac{1-r}{(1-\sqrt{r}z)^2}$ és $\varphi_4'(\sqrt{r}) = \dfrac{1}{1-r}$;
- $\varphi_5'(0) = -\varepsilon$.

Összeszorozva: $g'(z_0) = f_0'(z_0)\cdot\varphi_1'(0)\cdot\varphi_2'(0)\cdot\varphi_3'(r)\cdot\varphi_4'(\sqrt{r})\cdot\varphi_5'(0) = M\cdot\dfrac{1+r}{2\sqrt{r}}$ szintén pozitív valós, tehát $g\in\mathcal{F}$. A számtani-mértani miatt $1+r > 2\sqrt{r}$, de akkor $g'(z_0) > M$. $\lightning$