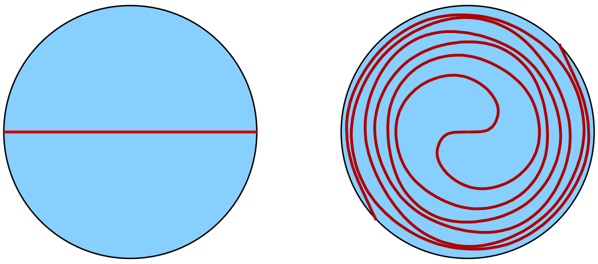
21. A tükrözési elv

Caratheodory tétele (bizonyítás nélkül). Tükrözési elv. Tükrözés körvonalakra. Bizonyítás a kis Picard-tételre

Tétel (Caratheodory)

Ha D_1 és D_2 Jordan-tartományok (egy-egy egyszerű zárt görbe belseje), és $f : D_1 \to D_2$ konform megfeleltetés közöttük, akkor f kiterjeszthető $\overline{D_1} \to \overline{D_2}$ homeomorfizmussá.

Példa. *Konform megfeleltetés helyett diffeomorfizmussal nem igaz, pl.*



$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \quad f(re^{it}) = re^{it+\frac{i}{1-r^2}}$$

Következmény

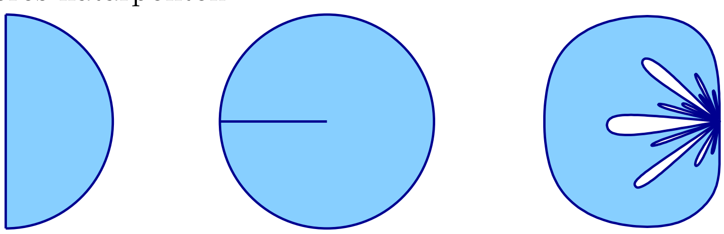
Ha D_1 és D_2 Jordan-tartományok (egy-egy egyszerű zárt görbe belseje), akkor a $D_1 \to D_2$ konform megfeleltetéseket egyértelműen meghatározza

- Három határpont képe (azonos körüljárással);
- Egy belső pont és egy határpont képe;
- Egy belső pont képe, és ott a derivált iránya.

Kiterjesztések

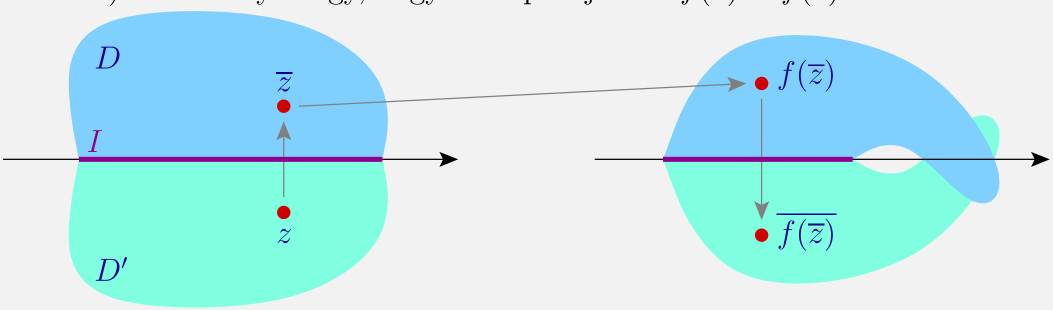
- Több egyszerű, zárt görbével határolt tartományok

- Többszörös határpontok



Tétel (tükrözési elv)

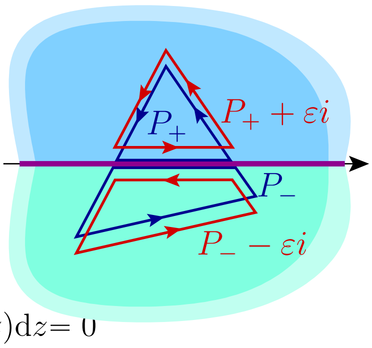
Legyen D tartomány a felső félsíkban, amelynek a határa tartalmazza az I intervallumot, és legyen D' a D tükörképe a valós tengelyre.
Tegyük fel, hogy f holomorf D-n, folytonos $(D \cup I)$-n, és I pontjaiban $\operatorname{Im} f = 0$. Ekkor f holomorfan kiterjeszthető (folytatható) a $D_1 = (D \cup I \cup D')$ tartományra úgy, hogy a D' pontjaiban $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$.



Bizonyítás. Az I pontjaiban a két képlet ugyanazt adja, így a kiterjesztett függvény folytonos D_1-en. Azt is tudjuk, hogy holomorf D-n és D'-n.

Annak bizonyításához, hogy f holomorf, elég a Morera-tételt ellenőrizni olyan D_1-beli háromszögekre, amelyeknek van pontja I-n.

Vágjuk el I-vel a háromszöget, és szűkítsük a tartományt úgy, hogy a maradék is tartalmazza a háromszöglemezt, és f egyenletesen folytonos legyen.
A háromszög két fele, P_+ és P_- egy-egy zárt poligon az $D \cup I$, illetve a $D \cup I$ halmazban; elég azt igazolni, hogy mindkét poligonon 0 a vonalintegrál.
Ha a P_+ poligont εi-vel eltoljuk a felső tartomány belsejébe, akkor a vonalintegrál 0 lesz; az egyenletes folytonosság miatt

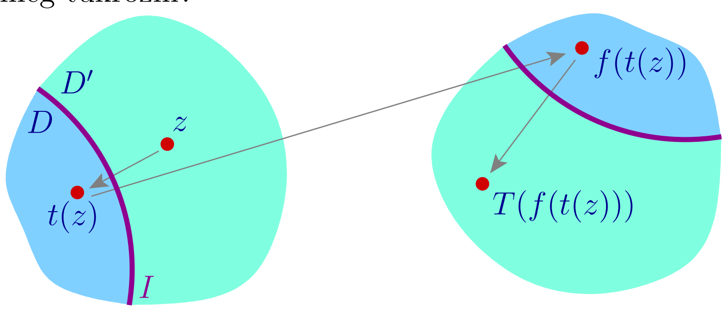


$$\int_{P_+} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{P_+} f(z+\varepsilon i)\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{P_+ + \varepsilon i} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

és ugyanígy $\int_{P_-} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Akinek kalapácsa van...

Mire lehetne még tükrözni?



- Az I lehet egy másik egyenes tetszőleges szakasza
- Az I lehet egy körív. (A középpontba nem terjeszt ki)

- Az f függvény I pontjaiban megengedett értékei lehetnek egy másik egyenes pontjai
- Az f függvény I pontjaiban megengedett értékei lehetnek egy kör pontjai, de a középpont képe ∞ lesz.

Bizonyítás a kis Picard-tételre

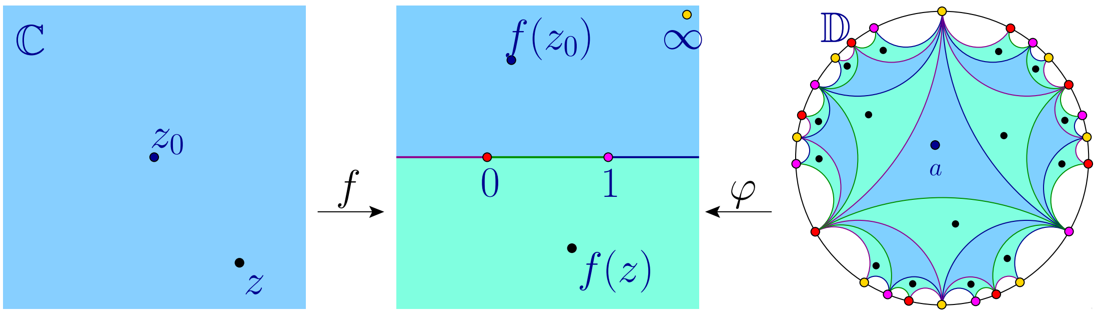
Tétel (kis Picard-tétel)

Ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor legfeljebb egy kivétellel minden komplex értéket felvesz.

Bizonyítás. Elég azt igazolni, hogy nincs olyan f egészfüggvény, ami nem veszi fel a $0, 1$ értékeket.

Vegyünk fel az egységkör (a körmodell) határán három pontot, és ezeket kössük össze, az egségkörre merőleges körívekkel. Legyen φ az a konform megfeleltetés, amely a három körív közötti "végtelen" háromszöget megfelelteti a felső félsíknak úgy, hogy a három csúcs képe a 0, az 1 és a ∞.

A háromszöget mindegyik oldalívére tükrözzük, és a φ függvényt kiterjesztjük a tükörképekre. Ezt ismételjük újra meg újra; ilyen módon az egész egységkört kicsempézzük a háromszög tükörképeivel, és a φ függvényt kiterjesztjük az egész egységkörön holomorf függvénnyé.



Bármelyik két szomszédos háromszöget és a közöttük futó körívet φ megfeleltet egy olyan tartománynak, amely a két félsíkból és a $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ és $(1, \infty)$ intervallumok valamelyikéből áll.

Jelöljünk ki egy z_0 pontot, amelyre $f(z_0)$ a felső félsíkban van, tehát φ szerinti egyik ősképe, a az eredeti háromszögben van. Most bármely z pont esetén definiálni fogunk egy $F(z)$ pontot az egységkörben úgy, hogy $\varphi(F(z)) = f(z)$.

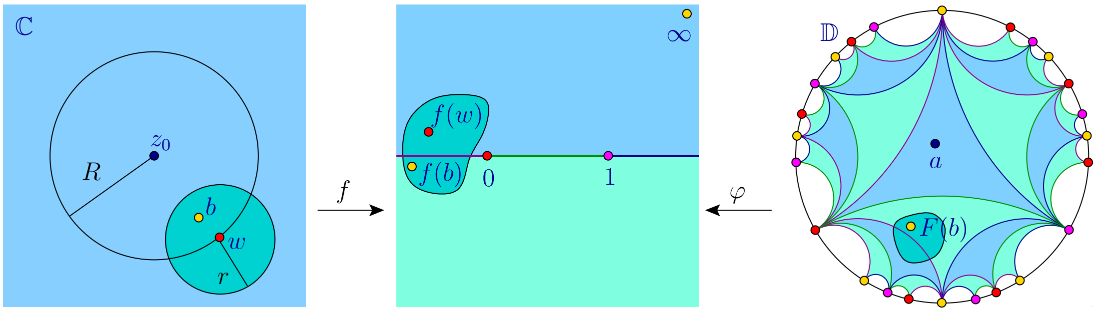
Legyen $R = \sup\left\{r : \text{létezik olyan } F : B(z_0, r) \to \mathbb{D} \text{ holomorf, amire } F(z_0) = a \text{ és } \varphi(F(z)) = f(z)\right\}$.

A z_0 egy környezetében $F = \varphi^{-1} \circ f$ megfelelő, tehát $R > 0$.

Az unicitástétel miatt az $F(z)$ értelmes a $B(z_0, R)$ körlapon.

1. eset: R véges.

Ha $|w - z_0| = R$, akkor van olyan $B(w, r)$ körlap, hogy $f(B(w, r))$ a lila, zöld és kék szakaszok közül legfeljebb csak egyet metsz, az X színűt. Vegyünk egy $b \in B(z_0, R) \cap B(w, r)$ pontot; ennek képe $F(w)$ az egyik háromszögben van; ha hozzávesszük az X színű oldalát és az mellette levő tükörkép háromszöget, a kettőt együtt φ megfelelteti a két félsíknak és az X színű szakasznak. Ennek a lokális φ-nek az inverzével F folytatható a $B(w, r)$ körlapra: $F(z) = \varphi^{-1}(f(z))$.

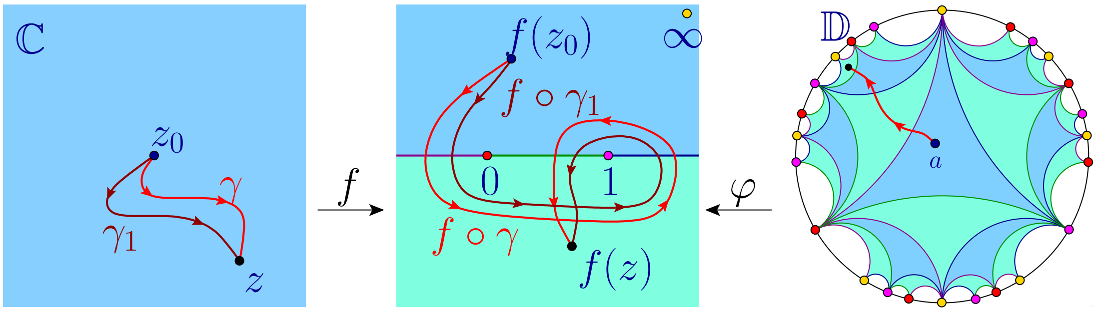


Az $|w - z_0| = R$ körvonal minden pontja körül tudjuk folytatni a függvényt egy kis (mikiegérfül alakú) körben. A kompaktság miatt ezek közül véges sok is lefedi a körvonalat. A szomszédos köröcskék metszete a nagy körbe is belemetsz, így a kétféle folytatás egy közös folytatást ad. Ezért a fülek egy közös folytatást adnak egy kicsivel nagyobb körre. De akkor az F folytatható egy R-nél nagyobb körre is. ↯

2. eset: $R = \infty$.

Ekkor F korlátos egészfüggvény, ezért konstans. De akkor $f = \varphi \circ F$ is konstans. ↯

Az előbbi bizonyítást úgy is elmondhatjuk, hogy ha összekötjük z_0-t és z-t egy γ görbével, akkor ezt a görbét a lokális φ^{-1} függvények segítségével az egységkörbe képezhetjük.



Ha egy másik, γ_1 görbével kötjük össze z_0-t és z-t, akkor ugyanezt az $F(z)$ értéket kapjuk. Ugyanis γ és γ_1 homotóp $\mathbb{C}$-ben, emiatt $f \circ \gamma$ és $f \circ \gamma_1$ is homotóp a $C \backslash \{0, 1\}$ halmazban. Emiatt $f \circ \gamma$ és $f \circ \gamma_1$ ugyanabban a sorrendben metszi át a lila, a zöld és a kék szakaszokat, ez a lila–zöld–kék sorozat meghatározza, hogy melyik csempében lesz a végpont.