1. KFT gyakorlat, 2024. február 12/14.

Tudnivalók

- Jelenlét, készülés:
  - A gyakorlaton a részvétel kötelező. Aki négynél többször hiányzik, nem kaphat jegyet.
  - Fontos az előadások követése, illik emlékezni a kimondott tételekre, hogy tudjuk gyakorolni.
  - A házi feladatok megoldása, de legalább alapos gondolkodás a feladatokon szintén kötelező.
- Számonkérés:
  - Terv: Két ZH lesz, március 25. és május 13., mindkettő előadás helyett. Javító és pót ZH: május 20.
  - Minden gyakorlat elején 50% valószínűséggel írunk, vagy nem írunk röpdolgozatot az egyik házi feladatból. A röpdolgozatokra 0–6 pontot lehet kapni. Aki hiányzik, vagy lekési a dolgozatírást, annak a pontszáma 0.
  - Lesznek valamivel gondolkodtatóbb, beadható szorgalmi feladatok, ezekért 1–1 pontot lehet kapni.
- Várható osztályozás:
  - A gyakorlati jegy
  $$\approx 0{,}4 \cdot Z_1 + 0{,}4 \cdot Z_2 + 0{,}2 \cdot \overline{R} + 0{,}2 \cdot Sz,$$
  ahol $0 \le Z_1, Z_2 \le 7$ a két jobban sikerült ZH pontszám (a háromból), $0 \le \overline{R} \le 6$ a röpdolgozatok átlaga a legrosszabbul sikerült dolgozat nélkül, Sz a megszerzett szorgalmi pontok száma. A szorgalmi pontok csak az elégséges osztályzat megszerzése után használhatók fel.
- Feladatsorok: `https://kosgeza.web.elte.hu/kft`
- Jegyzet (előkészületben): `https://kosgeza.web.elte.hu/KftJegyzet`
- További gyakorló feladatok: `http://etananyag.ttk.elte.hu/request.php?101`

1.1. Ábrázoljuk azoknak a z komplex számoknak a halmazát, amikre

$$(a)\ \operatorname{Re}(z^2) = 4; \quad (b)\ |z-1| = 2|z+1|; \quad (c)\ \arg(z+1) \equiv \arg(2z-i) \pmod{2\pi}.$$

1.2.

$$(a) \quad (1+\sqrt{3}i)^{30} = ? \qquad (b) \quad \sqrt[3]{i} = ? \quad (c) \quad \sqrt[4]{i} = ?$$

1.3. Írjuk fel képlettel az $1+i$ középpontú, 45 fokos, pozitív irányú, $\sqrt{2}$-szeres forgatva nyújtást.

1.4. Írjuk fel azokat az $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre $u(x,y) + v(x,y) \cdot i = (x+yi)^3$, és ellenőrizzük a Cauchy–Riemann egyenleteket.

1.5. Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a Cauchy–Riemann egyenletek a következő függvényekre:

$$(x^2+y^2, 2xy); \qquad (x^2-y^2, 2xy); \qquad (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

1.6.

(a) Hova képezi a $w(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ *Zsukovszkij-leképezés* az egységkörvonalat?

(b) Mutassuk meg, hogy a 0 középpontú, nem egységnyi sugarú körök képei $1, -1$ fókuszú ellipszisek. (Hozzuk egyszerűbb alakra az $|z-1| + |z+1|$ kifejezést, lehetőleg a $z = x+yi$ algebrai alakra áttérés nélkül.)

(c) Mutassuk meg, hogy a 0-n átmenő, a tengelyektől különböző egyenesek képei $1, -1$ fókuszú hiperbolák.

(d) Milyen pontokban szögtartó a Zsukovszkij-függvény?

(e) Igazoljuk a Zsukovszkij-függvény és a komplex differenciálhatóság segítségével, hogy az $1, -1$ fókuszú ellipszisek és hiperbolák merőlegesen metszik egymást.

Házi feladatok

1.7. (a) Alakítsuk szorzattá az $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ kifejezést.

(b) Mutassuk meg, hogy az a, b, c komplex számok pontok akkor és csak akkor alkotnak (esetleg egy ponttá fajuló) szabályos háromszöget, ha $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

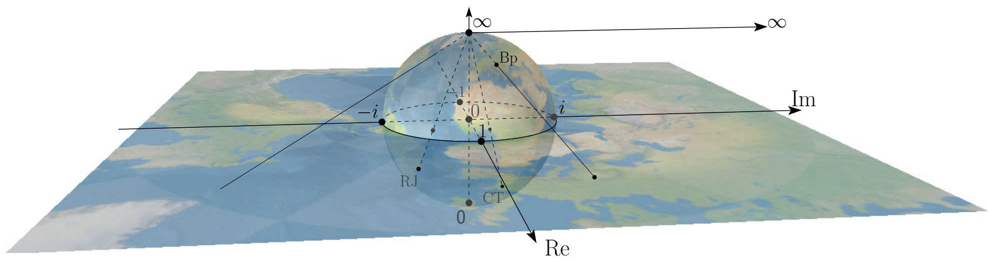
1.8. Keressünk olyan $v(x, y) : R^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényt (ha van), melyre az $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mindenütt differenciálható, ha

(a) $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$;

(b) $u(x, y) = x^2 + y^2$.

1.9. A Riemann-gömb milyen transzformációit írják le a következő függvények?

$$(a) \quad z \mapsto -z; \qquad (b) \quad z \mapsto \overline{z}; \qquad (c) \quad z \mapsto iz; \qquad (d) \quad z \mapsto \frac{1}{z}$$



Szorgalmi feladat, írásban beadható március 3-ig

Sz 1.1. Milyen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ komplex mátrixok esetén lesz a $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ függvény a Riemann-gömbnek egy forgatása?

Sz 1.2. Legyen $p(z)$ nem konstans, komplex együtthatós polinom. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

(a) Ha p minden gyökének nemnegatív a valós része és $\operatorname{Re} z < 0$, akkor $\operatorname{Re} \dfrac{p'(z)}{p(z)} < 0$.

(b) Ha $p(z)$ gyökei a $\operatorname{Re} z \geq 0$ félsíkba esnek, akkor $p'(z)$ gyökei is.

(c) (Gauß–Lucas tétel) Ha $p(z)$ nem konstans komplex polinom, akkor p gyökeinek konvex burka tartalmazza p' gyökeit.