2. KFT gyakorlat, 2024. február 19. 14^{00}–15^{30} / február 21. 12^{05}–13^{35}

Emlékeztető:

$$e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \qquad \arg e^z \equiv \operatorname{Im} z \pmod{2\pi}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

2.1. (a) Milyen azonosságokat kaphatunk az $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ azonosság négyzetre emelésével, illetve deriválásával?

(b) Írjuk fel az $\frac{1}{z^3}$ függvény 1 körüli Taylor-sorát. Mi a Taylor-sor konvergenciahalmaza? Előállítja-e a Taylor-sor a függvényt?

2.2. Ábrázoljuk (vázlatosan) a következő halmazokat:

$$(a)\ \left\{e^z :\ |\operatorname{Re} z| < 1,\ |\operatorname{Im} z| < 1\right\}; \qquad (b)\ \left\{e^z :\ |z| < 1\right\}.$$

2.3. (a) Oldjuk meg a $\cos z = \frac{5}{4}$ egyenletet.

(b) Mik a komplex szinuszfüggvény gyökei?

(c) Mi a komplex szinuszfüggvény értékkészlete?

2.4. Ellenőrizzük a komplex tangensfüggvény addíciós képletét.

2.5. Hova képezi a komplex koszinuszfüggvény

(a) a $[0, \pi/2]$ szakaszt?

(b) A képzetes tengely pozitív felét?

(c) A $\pi/2$ végpontú, felfelé álló függőleges egyenest?

(d)* A $0 < \operatorname{Re} z < \pi/2$, $\operatorname{Im} z > 0$ tartományt?

Házi feladatok

2.6. Fejtsük hatványsorba a 0 körül az $\frac{1}{1+z}$ és az $\frac{1}{(1+z)^2}$ függvényt.

2.7. Hova képezi a komplex tangensfüggvény

(a) a $[0, \pi/2]$ szakaszt?

(b) A képzetes tengely pozitív felét?

(c) A $\pi/2$ végpontú, felfelé álló függőleges egyenest?

Szorgalmi feladatok, írásban beadható március 10-ig

Sz 2.1. Abel-átrendezéssel bizonyítsuk be, hogy a $\sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n}$ hatványsor az egységkörvonal minden, az 1-től különböző pontjában konvergál.

Sz 2.2. Az ábrán látható tartományon a $f(z) = \arg(\cos z)$ függvény értelmezhető úgy, hogy $f(z)$ folytonos, és $f(0) = 0$.
Mennyi $f(-\pi)$?