3. KFT gyakorlat, 2024. február 26. 14^{00}–15^{30} / február 28. 12^{05}–13^{35}

Emlékeztető:

$$e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad |e^z| = e^{\mathrm{Re}\,z} \qquad \arg e^z \equiv \mathrm{Im}\,z \pmod{2\pi}$$

$$\log z \equiv \ln|z| + i\arg z \pmod{2\pi i} \qquad \mathrm{Re}\,(\log z) = \ln|z| \qquad \mathrm{Im}\,(\log z) \equiv \arg z \pmod{2\pi}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

3.1. Számítsuk ki és ábrázoljuk $\log(1+i)$ és $(1-i)^i$ összes értékét.

3.2. Ábrázoljuk a következő halmazt:

$$\left\{\log\frac{1-z}{1+z} :\ \mathrm{Re}\,z = 0\right\};$$

3.3. Legyen $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t + t^2 i$.
(a) Számítsuk ki az $\int_\gamma z^2 \mathrm{d}z$ vonalintegrált a Riemann-integrálos átírásból.
(b) Számítsuk ki az $\int_\gamma z^2 \mathrm{d}z$ vonalintegrált a Newton–Leibniz formulából.

3.4. Legyen n egész szám. (Negatív is lehet.)

$$\int_{|z|=1} z^n \,\mathrm{d}z = ?$$

3.5. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Re}\,z < 0$ esetén $\left|1 - e^z\right| < |z|$. (Hol van ebben vonalintegrál?)

Házi feladatok

3.6. Számítsuk ki i^{-i} összes értékét.

3.7. Tekintsük a logaritmusfüggvénynek azt a $\mathbb{C}\setminus\{x+iy : x \ge 0, y = \sin x\}$ tartományon holomorf ágát, amelyre $\log 1 = 0$. Erre a log függvényre $\log(e^{3/2}) = ?$

3.8. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

$$(a) \quad \int_{|z|=1} (\mathrm{Im}\,z)\,\mathrm{d}z; \qquad (b) \quad \int_{|z|=1} \overline{z}\,\mathrm{d}z;$$

Szorgalmi feladatok, írásban beadható március 17-ig

Sz 3. Legyen f olyan polinom, amire igaz az, hogy f' gyökei az egységkör belsejében vannak. Bizonyítsuk be, hogy az egységkörvonal f szerinti képe mindig balfelé kanyarodik, azaz bármely valós t-re $\left(\arg\left(\left(f(e^{it})\right)'\right)\right)' > 0$.