4. KFT gyakorlat, 2024. március 4. 14^{00}–15^{30} / március 6. 12^{05}–13^{35}

Emlékeztető:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z;\qquad f^{(k)}(a)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\mathrm{d}z\qquad |a-c|<r$$

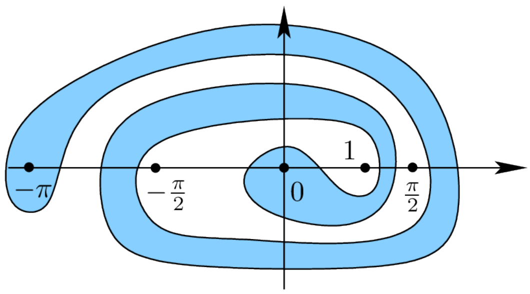
4.1. Melyik függvénynek létezik primitív függvénye az adott halmazon?

$$(a)\ e^{z^2},\quad \mathbb{C};\quad (b)\ z^2+\frac{1}{z^2},\quad \mathbb{C}\setminus\{0\};\quad (c)\ z+\frac{1}{z},\quad \mathbb{C}\setminus\{0\};\quad (d)\ z+\frac{1}{z},\quad \operatorname{Re}z>0;\quad (e)\ \frac{1}{z+1},\quad B(0,1)$$

4.2.

$$(a)\int_{|z|=3}\frac{\cos z}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}\mathrm{d}z=?\quad (b)\int_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-2)^3}\mathrm{d}z=?\quad (c)\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2(z+2)}\mathrm{d}z=?\quad (d)\int_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2-1}\mathrm{d}z=?$$

4.3. Mutassuk meg, hogy a $f(z)=\log\cos z$ függvénynek a rajzon látható tartományon létezik olyan holomorf ága, amelyre $f(0)=1$.



4.4. Legyen $p(z)$ legalább másodfokú polinom, amelynek minden gyöke az $|z|<r_0$ körbe esik. Legyen $r>r_0$ esetén $I(r)=\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{\mathrm{d}z}{p(z)}\mathrm{d}z$.

(a) A triviális becslés segítségével igazoljuk, hogy $\lim\limits_{r\to\infty}I(r)=0$.

(b) Igazoljuk, hogy $I(r)$ konstans, vagyis bármely $r_1>z_2>z_0$ esetén $I(r_1)=I(r_2)$.

(c) **???**

4.5. Az f függvény holomorf a zárt egységkörön, és $|f|\le 1$. legfeljebb mekkora lehet $\left|f'''(0)\right|$? (Cauchy-formula + trivi becslés.)

Házi feladatok

4.6.

$$(a)\int_{|z|=1}\frac{2^z}{z^2}\mathrm{d}z=?\qquad (b)\int_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z=?\qquad (c)\int_{|z|=2}\frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\mathrm{d}z=?$$

4.7. (a) Van-e primitív függvénye az $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z}$ függvénynek a $\mathbb{C}\setminus\{-1,0,1\}$ tartományon? (A síkból elhagytunk 3 pontot.)

(b) Van-e primitív függvénye az $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z}$ függvénynek a $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ tartományon (A síkból elhagytunk egy szakaszt.)

4.8. Tegyük fel, hogy az f függvény holomorf a zárt felső félsíkban, és $|f|\le 1$.

(a) Írjuk fel $f'(i)$ értékét vonalintegrál alakban, az integrációs út legyen egy R sugarú félkör.

(b) Igazoljuk, hogy $\left|f'(i)\right|\le\dfrac{1}{2}$.

Szorgalmi feladatok, írásban beadható március 24-ig

Sz 4.1. Bizonyítsuk be az algebra alaptételét a következő módszerrel:

Tetszőleges n-edfokú, nem konstans $p(z)$ komplex együtthatós polinom esetén vizsgáljuk az $\frac{z^{n-1}}{p(z)}$ függvénynek egy nagy körön vett vonalintegrálját, és hasonlítsuk össze az $\frac{1}{z}$ függvény vonalintegráljával.

Sz 4.2. Tudjuk, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \mathrm{d}x = 1$. Ennek felhasználásával igazoljuk, hogy tetszőleges a valós számra

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i a x} \mathrm{d}x = e^{-\pi a^2},$$

avagy az $e^{-\pi x^2}$ függvény önmaga Fourier-transzformáltja.