

## 5. KFT gyakorlat, 2024. március 11. 14<sup>00</sup>–15<sup>30</sup> / március 13. 12<sup>05</sup>–13<sup>35</sup>

5.1. A Morera-tétel segítségével igazoljuk, hogy

$$f(z) = \int_{t=1}^2 \frac{e^{tz}}{t} dt$$

egészfüggvény.

5.2. Alkalmazhatjuk-e a Vitali-Montel tételt az  $f_n(z) = \sin(nz)$  függvénysorozatra a valós egyenes egy kis környezetében?

5.3. Fejtsük 1 körüli hatványsorba az  $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$  függvényt. (Bontsuk parciális törtekre, és a parciális törteket alakítsuk egy-egy mértani sor összegévé.) Mennyi a hatványsor konvergenciasugara?

5.4. Döntsük el, van-e olyan  $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf függvény, amelyre elég nagy  $n \in \mathbb{N}$  esetén

$$(a) f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}; \quad (b) f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}; \quad (c) f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad (d) f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n}.$$

5.5. (a) Az  $f(z)$  függvény holomorf az  $1 < |z| < 2$  tartományon, és az  $[1, 2]$  szakaszon csak valós értékeket vesz fel. Az  $f(z)$  és a  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  függvények összehasonlításával mutassuk meg, hogy  $f$ -nek a  $[-2, -1]$  szakaszon is csak valós értékei vannak.

(b) Miért nem működik a megoldás az  $1 < |z| < 2$ ,  $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{4\pi}{3}$  tartománnyal?

5.6. Az  $f(z)$  egészfüggvényre  $|f(1/n)| = 1/n^2$ , ha  $n = 1, 2, \dots$ , és  $|f(i)| = 2$ . Mekkora lehet  $|f(-i)|$ ? (Vizsgáljuk a  $h(z) = f(z) \cdot \overline{f(\bar{z})}$  függvényt.)

Mutassunk példát ilyen tulajdonságú függvényre.

### Házi feladatok

5.7. Döntsük el, van-e olyan  $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf függvény, amelyre elég nagy  $n \in \mathbb{N}$  esetén

$$(a) f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+2}; \quad (b) f\left(\frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{n}; \quad (c) f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\cos(n\pi)n+2}.$$

5.8. Az  $f(z)$ ,  $\overline{f(\bar{z})}$  és  $\overline{f(-\bar{z})}$  függvények összehasonlításával igazoljuk, hogy ha az  $f(z)$  egészfüggvény a valós és a képzetes tengelyen is csak valós értékeket vesz fel, akkor páros függvény.

5.9. A  $g(z)$  egészfüggvényre  $\arg g(1/n) \equiv \frac{\pi}{n^2} \pmod{2\pi}$ , ha  $n = 1, 2, \dots$ . Mi lehet  $\arg g(2)$ ?

### Szorgalmi feladatok, írásban beadható március 31-ig

Sz 5.1. Nevezzük az  $f(z)$  egészfüggvényt *érdekesnek*, ha a  $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2$  parabola pontjaiban  $\operatorname{Re} f(z) = 0$ .

(a) Mutass példát nemkonstans érdekes függvényre.

(b) Bizonyítsd be, hogy minden  $f$  érdekes függvényre teljesül, hogy  $f'(-3/4) = 0$ .

(CIIM 2014, Costa Rica)

Sz 5.2. Legyen  $0 < c \leq 1$  és

$$\left(\frac{-z}{\log(1-z)}\right)^c = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (|z| < 1).$$

Bizonyítsd be, hogy  $a_1, a_2, \dots$  mindegyike negatív.

(IMO Shortlist 2006/A2 alapján)