6. KFT gyakorlat, 2024. március 18. 14^{00}–15^{30} / március 20. 12^{05}–13^{35}

ZH: Március 25, hétfő, 8^{00}–9^{55}, Északi Tömb 0.81 Ortvay terem.

Konzultáció: ⟶ Szavazás és konzultáció az előadás Teams csoportjában

6.1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény holomorf és nem konstans egy tartományon, akkor a valós és a képzetes részének nincs lokális szélsőértéke. (Maximum-elv az .... függvényre.)

6.2. Legyen $f(z)$ olyan egészfüggvény, amelyre $|f(z)| \le e^{|z|}$, és legyen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a függvény 0 körüli hatványsora. Az együtthatóbecslés segítségével igazoljuk, hogy $|a_n| \le \left(\frac{e}{n}\right)^n$. (Mekkora körre érdemes felírni az együtthatóbecslést?)

6.3. A Liouville-tétel és az unicitástétel segítségével igazoljuk, hogy ha f kétszeresen periodikus egészfüggvény (vagyis $f(z+a) = f(z)$, $f(z+b) = f(z)$, és az a, b periódusok nem egy közös c periódus többszörösei, vagyis $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$), akkor f konstans.

6.4. Az előadáson tanult program alapján írjuk fel az $f(z) = \dfrac{4}{z(z-4)}$ függvénynek azt az 1 körüli Laurent-sorát, amely a $z = 3$ pontban konvergens. Milyen halmazon állítja elő a függvényt ez a Laurent-sor?

6.5. Írjuk fel az $\dfrac{1}{\sin z}$ függvény 0 körüli, a $\dot{B}(0,\pi)$ halmazon konvergens Laurent-sorának első három nemnulla tagját.

Házi feladatok

6.6. Fejtsük Laurent-sorba a $\dfrac{z^3+2}{z(z+1)}$ függvényt az 1 körül, az $1 < |z-1| < 2$ halmazon.

6.7. Az $f(z)$ függvény holomorf az $|z| < 1+\varepsilon$ körlemezen. Legyen $A = \max_{0\le t\le\pi} |f(e^{it})|$ és $B = \max_{\pi\le t\le 2\pi} |f(e^{it})|$. Bizonyítsuk be, hogy $|f(0)| \le \sqrt{AB}$. (Maximum-elv az .... függvényre.)

6.8. Írjuk fel az $\dfrac{1}{e^z - 1 - z}$ függvény 0 körüli, valamilyen $\dot{B}(0,r)$ halmazon konvergens Laurent-sorának első három nemnulla tagját.

Szorgalmi feladatok, írásban beadható április 14-ig

Sz 6.1. Legyen $0 < r_1 < r_2 < r_3$.

Bizonyítsuk be, hogy ha az $f(z)$ függvény holomorf az $r_1 \le |z| \le r_3$ halmazon, akkor

$$\left(\max_{|z|=r_2} |f(z)|\right)^{\log(r_3/r_1)} \le \left(\max_{|z|=r_1} |f(z)|\right)^{\log(r_3/r_2)} \cdot \left(\max_{|z|=r_3} |f(z)|\right)^{\log(r_2/r_1)}.$$

(Hadamard-féle három kör tétel)

Sz 6.2. Bizonyítsuk be – a Picard-tétel felhasználása nélkül –, hogy ha $f(z)$ egészfüggvény, és nincs értéke a $[0,1]$ szakaszon, akkor $f(z)$ konstans.