

## 7. KFT gyakorlat, 2024. március 25. 14<sup>00</sup>–15<sup>30</sup> / április 3. 12<sup>05</sup>–13<sup>35</sup>

7.1.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{\sin z} = ?$$

7.2. Tegyük fel, hogy az  $r < |z| < R$  körgyűrűn  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ .

(1) Hogy olvashatjuk le az  $a_n$  együtthatókról, hogy  $f(z)$ -nek van-e primitív függvénye?

(2) Hogy olvashatjuk le az  $a_n$  együtthatókról, hogy  $f(z)$  primitív függvényének van-e primitív függvénye?

7.3. Az  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$  függvény holomorf a  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  halmazon, és

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z f(z)) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = 0.$$

Az együtthatóbecslés segítségével bizonyítsuk be, hogy  $f(z)$  konstans.

### Házi feladatok

7.4. Legyen  $0 < r < R$ ,  $K = B(0, R)$  az  $R$  sugarú Körlemez és  $G = K \setminus \overline{B}(0, r)$  az  $R$  külső,  $r$  belső sugarú Gyűrű. Az  $f(z)$  Laurent-sora segítségével bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf függvényre a következő állítások ekvivalensek:

- (a)  $f$  folytatható  $K$ -ra, tehát van olyan holomorf  $F : K \rightarrow \mathbb{C}$  függvény, amelyre  $f = F|_G$ ;
- (b) Bármely  $g : K \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf függvényre az  $f \cdot g$  függvénynek létezik primitív függvénye  $G$ -n.

### Szorgalmi feladatok, írásban beadható április 21-ig

**Sz7.** Legyen  $F = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$  a nyílt felső félsík, és  $f(z)$  holomorf  $F$ -en. Igazoljuk, hogy ha  $|f(z)| \leq \frac{1}{|z-i|}$

minden  $z \in F$ -re, akkor az is igaz, hogy  $|f(z)| \leq \frac{1}{|z+i|}$  minden  $z \in F$ -re.