8. KFT gyakorlat, 2024. április 7. 14^{00}–15^{30} / április 9. 12^{05}–13^{35}

8.1. Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? Milyen típusúak ezek a szingularitások? Mennyi ott a reziduum?

$$\frac{1}{z};\quad \frac{1}{z^2};\quad \frac{e^z}{z^2};\quad e^{1/z};\quad e^{1/z^4};\quad \frac{z}{\sin z};\quad \frac{1}{\sin z};\quad \frac{1}{e^z-1};\quad \frac{e^z}{z^2+1};\quad \frac{1}{\sin^3 z}$$

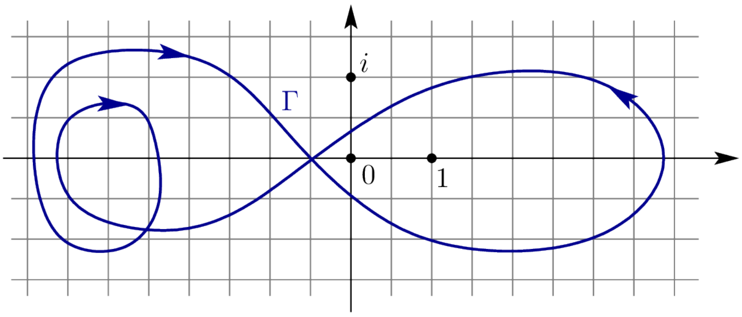
8.2. Számítsuk ki az alábbi vonalintegrálokat:

$$\text{(a)} \int_{|z|=5} \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(b)} \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(c)} \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2-3z+2}\,\mathrm{d}z$$

$$\text{(d)} \int_{|z|=3} \frac{1}{\sin z}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(e)} \int_{|z|=5} \frac{1}{\sin z}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(f)} \int_{|z|=3} \frac{1}{e^z-1}\,\mathrm{d}z$$

$$\text{(g)} \int_{|z|=3} \frac{1}{\sin z \cos z}\,\mathrm{d}z$$

8.3. Legyen f egészfüggvény, és Γ az ábrán látható görbe.



(a) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sin z} = ?$

(b) Legyen f egészfüggvény. Fejezzük ki $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{\sin^2 z}\mathrm{d}z$ értékét $f(0), f(\pi), f'(0)$ stb. segítségével.

8.4. Számítsuk ki az $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ függvény Fourier-transzformáltját, avagy $s \in \mathbb{R}$ esetén

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, e^{-2\pi i s x}\,\mathrm{d}x = ?$$

(Integráljunk alsó vagy felső félkörön. Vigyázat! $s \geq 0$ és $s \leq 0$ két különböző eset.)

8.5. Tegyük fel, hogy $f(z)$-nek m-edrendű pólusa van a-ban, és $p(w)$ egy n-edfokú polinom. A $p\big(f(z)\big)$ függvény a körüli aszimptotikus viselkedéséből (milyen gyorsan tart ∞-hez) számítsuk ki, hogy a $p\big(f(z)\big)$ függvénynek hányadrendű pólusa van a-ban.

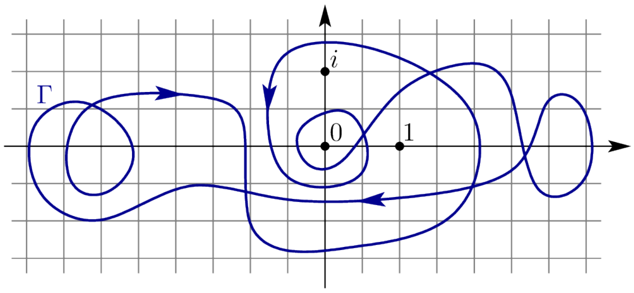
8.6. Lehet-e az $f(z)$ függvény izolált szingularitása $e^{f(z)}$-nek pólusa? (Ha $\lim_{z\to c} f(z) = \infty$, akkor...)

Házi feladatok

8.7. Hol vannak az alábbi függvényeknek izolált szingularitásai? Milyen típusúak ezek a szingularitások? Mennyi ott a reziduum?

$$\frac{1}{z^2+2z};\qquad \sin\frac{1}{z^3};\qquad z^3e^{1/z};\qquad \sin\frac{1}{z};\qquad \frac{1}{\sin\frac{1}{z}};\qquad \frac{z}{\sin^2 z};\qquad \frac{1}{e^z-1-z}$$

8.8. Legyen f egészfüggvény, és Γ az ábrán látható görbe.



Fejezzük ki $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^2\cos z}\mathrm{d}z$ értékét a reziduumtétel, $f(0)$, $f'(0)$, $f(\pi/2)$ és $f(-\pi/2)$ segítségével.

8.9.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^3+x}\mathrm{d}x = ?$$

(Integráljunk félkörön.)

Szorgalmi feladatok, írásban beadható április 28-ig

Sz 8.1. Legyen

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k}+\frac{1}{z+k}\right).$$

(a) Igazoljuk, hogy $f(z)$ holomorf a $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ tartományon, és periodikus 1 szerint.
(b) A Liouville-tétel segítségével igazoljuk, hogy $f(z)=\pi\,\mathrm{ctg}(\pi z)$.

Sz 8.2. A reziduumtétel segítségével igazoljuk, hogy ha K nemnegatív egész, és $a_1,\dots,a_n$ különböző komplex számok, akkor

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^K}{\prod\limits_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne j}}(a_j-a_k)}=\sum_{\substack{k_1,\dots,k_n\ge 0\\ k_1+\dots+k_n=K-n+1}} a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}.$$

(A baloldalon álló szám a z^K függvény osztott differenciája az $a_1,\dots,a_n$ alappontokon.)