9. KFT gyakorlat, 2024. április 15. 14^{00}–15^{30} / április 17. 12^{05}–13^{35}

9.1. Integráljunk téglalap határán:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

9.2. Számítsuk ki a $\dfrac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{z^2 - \frac{1}{4}}$ függvény reziduumaiból a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}}$ összeget. Utána számítsuk ki teleszkópos összeggé alakítva is, és hasonlítsuk össze az eredményt.

9.3. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2+1} = \frac{e^2+1}{e^2-1}.$$

9.4. Legyen a komplex szám, $|a| = 3$. A Rouché-tételből számoljuk ki, hogy hány gyöke lehet (multiplicitással számolva) a $z^4 + z^3 + az - 1$ polinomnak az $1 < |z| < 2$ tartományon.

9.5. Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf és injektív a zárt egységkörlemezen. Az argumentum-elv segítségével írjuk fel az f inverzét integrál alakban.

9.6. Tegyük fel, hogy $f(z)$ *elliptikus* (két különböző irányban periodikus), nem konstans, meromorf függvény.

(a) A reziduumtétel segítségével mutassuk meg, hogy –multiplicitással számolva– a fundamentális paralelogrammán $f(z)$-nek legalább két pólusa van.

(b) Az argumentum-elv segítségével mutassuk meg, hogy a fundamentális paralelogrammán $f(z)$-nek ugyanannyi gyöke van, mint pólusa.

(c) Mutassuk meg, hogy a fundamentális paralelogrammán $f(z)$ minden értéket ugyanannyiszor vesz fel.

Házi feladatok

9.7. Integráljunk félkör vagy téglalap határán:

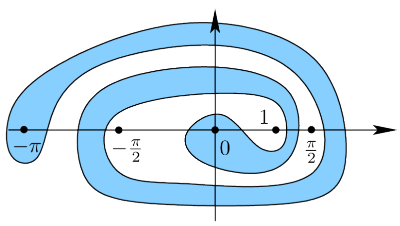
$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

9.8.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = ?$$

9.9. Hány gyöke van a $\sin z = 2z^2$ egyenletnek az egységkörben?

9.10.* Az ábrán látható tartományon az $f(z) = \log \cos z$ függvény holomorfan értelmezhető úgy, hogy $f(0) = 0$. Határozzuk meg $f(-\pi)$ értékét az argumentum-elvből.



(Segítség: vizsgáljuk a tartományt és a tartomány tükörképét is.)

Szorgalmi feladatok, írásban beadható május 5-ig

Sz 9.1. Bizonyítsd be, hogy a polinomok gyökei folytonosan függnek az együtthatóktól, azaz ha az $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ polinom (ahol $a_n \neq 0$) gyökei $u_1, \ldots, u_n$, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan δ, hogy ha $b_0, \ldots, b_n$ komplex számok és $|b_j - a_j| < \delta$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, és a $b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0$ polinom gyökei $w_1, \ldots, w_n$, akkor az $1, \ldots, n$ indexek egy alkalmas σ permutációjára $|w_j - u_{\sigma(j)}| < \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Sz 9.2. A karakterisztikus függvények gyökeinek vizsgálatával bizonyítsuk be, hogy tetszőleges X, Y független, azonos eloszlású, legfeljebb 5 abszolút értékű valószínűségi változókhoz létezik olyan $t \in [0, 1]$, amire $|P(X + Y < t) - t| > 10^{-10}$.

(Schweitzer-verseny alapján)