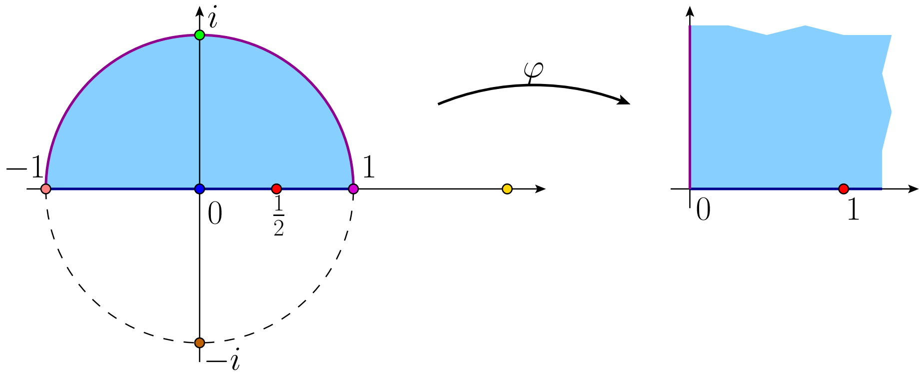
10. KFT gyakorlat, 2024. április 22. 14^{00}–15^{30} / április 24. 12^{05}–13^{35}

10.1. Tegyük fel, hogy $\varphi(z)$ olyan lineáris törtfüggvény, ami az $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ félkört megfelelteti az $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ negyedsíknak úgy, hogy az $[-1, 1]$ szakasz képe a valós, a félkörvonal képe a képzetes tengely pozitív fele, és $\varphi(\frac{1}{2}) = 1$.



(a) Határozzuk meg $\varphi(-1)$ és $\varphi(1)$ értékét a szögtartás és az irányítástartás (argumentum-elv) segítségével. (Rajzoljunk nyilacskákat a határra.)

(b) Határozzuk meg $\varphi(2)$ értékét a szimmetriatartásból.

(c) Határozzuk meg $\varphi(0)$, $\varphi(\infty)$, $\varphi(i)$ és $\varphi(-i)$ értékét a kettősviszonytartásból.

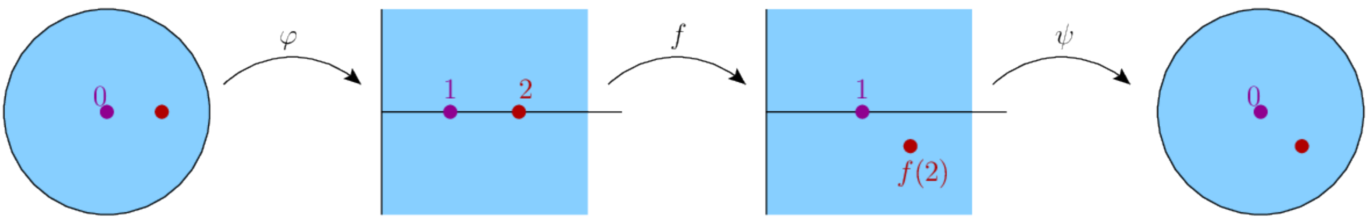
(d) Írjuk fel a $\varphi(z)$ függvényt képlettel, és gondoljuk meg, hogy ez a függvény tényleg megfelelteti a félkört a negyedsíknak.

10.2. Legyen $J = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ a nyílt jobb félsík. Az $f : J \to J$ függvény holomorf, és $f(1) = 1$.

(a) Írjunk fel olyan $\varphi : B(0,1) \to J$ konform megfeleltetést, amelyre $\varphi(0) = 1$. $\varphi^{-1}(2) =$?

(b) Írjunk fel olyan $\psi : J \to B(0,1)$ konform megfeleltetést, amelyre $\psi(1) = 0$. A Schwarz-lemma segítségével határozzuk meg $\psi(f(2))$ lehetséges értékeit.

(c) Mi a lehetséges $f(2)$ értékek halmaza?



10.3. Legyen $f : B(0,1) \to B(0,1)$ holomorf, és $a \in B(0,1)$ az f-nek gyöke. Igazoljuk, hogy $\left|f(z)\right| \le \left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$ úgy, hogy

(a) a $g(z) = f(z) \cdot \dfrac{1-\bar{a}z}{z-a}$ függvényre alkalmazzuk a maximum-elvet;

(b) a $h(w) = f\left(\dfrac{w+a}{1+\bar{a}w}\right)$ függvényre felírjuk a Schwarz-lemmát.

10.4. (a) Írjuk fel a felső félsíknak azt az f konform automorfizmusát, amelyre $f(0) = 1$, $f(1) = \infty$, és $f(\infty) = 0$.

(b) Tegyük fel, hogy a h konform leképezés a felső félsíkra képezi a K középpontú ABC szabályos háromszöglemezt, és ez a függvény folytonosan kiterjeszthető a határra úgy, hogy $h(A) = 0$, $h(B) = 1$, és $h(C) = \infty$. $h(K) =$? (Vizsgáljuk a $h^{-1} \circ f \circ h$ leképezést.)

Házi feladatok

10.5. Írjunk fel (lehetőleg számolás nélkül) egy-egy olyan lineáris törtfüggvényt, amely
(a) az egységkört a jobb félsíkba képezi;
(b) a jobb félsíkot az egységkörbe képezi;
(c) első síknegyedet az egységkör jobb felébe képezi.

10.6. (a) Létezik-e olyan $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ alakú függvény, melyre alkalmas páronként különböző $x_1, \dots, x_5$ valós számokkal

$$f(x_1) = x_2, \quad f(x_2) = x_3, \quad f(x_3) = x_4, \quad f(x_4) = x_5, \quad f(x_5) = x_1$$

teljesül? (KöMaL B. 4650.)
(b) Ha $z_1 = -1$, $z_2 = 0$ és $z_3 = 1$, akkor mi lehet z_4 és z_5? (Kettősviszony)

10.7. Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkör belsejében, $f(0) = 1$ és $\operatorname{Re} f > 0$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le \operatorname{Re} f(z) \le \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

(Komponáljuk f-et lineáris tört függvényekkel, majd Schwarz-lemma.)

Szorgalmi feladatok, írásban beadható május 12-ig

Sz 10.1. Mutassuk meg, hogy a felső félsík konform automorfizmuscsoportja $PSL(2,\mathbb{R})$, tehát a pozitív determinánsú, 2×2-es valós mátrixok csoportja, faktorizálva az egységmátrix többszöröseivel.

Sz 10.2. Legyen a, b, c három pont az egységkörben, és

$$f(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \cdot \frac{z-b}{1-\overline{b}z} \cdot \frac{z-c}{1-\overline{c}z}.$$

Mutassuk meg, hogy $f'(z)$-nek (multiplicitással számolva) pontosan két gyöke van az egységkör belsejében.

Sz 10.3. Legyen $P(x)$ olyan nemkonstans valós polinom, amelyre $P(\cos t)^2 + P(\sin t)^2 = 1$. Mutassuk meg, hogy $P(x) = \pm T_k(x)$ valamilyen páratlan pozitív egész k-val. (T_k a k-adik elsőfajú Csebisev-polinom: $T_k(\cos t) = \cos kt$.)