

12. KFT gyakorlat, 2024. május 6. 14⁰⁰–15³⁰ / május 8. 12⁰⁵–13³⁵

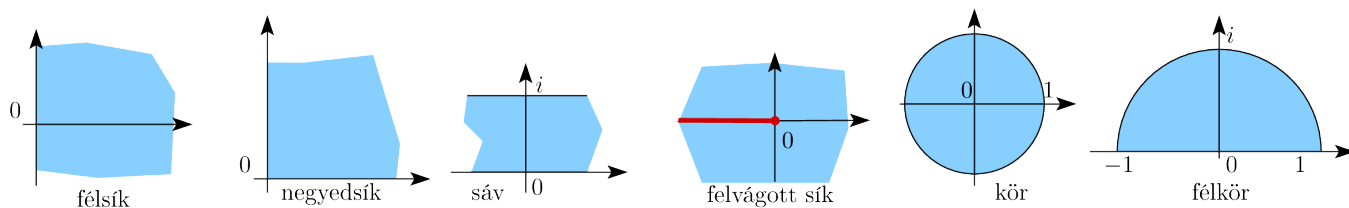
Poisson-formula: Ha $u(z)$ harmonikus az egységkörben, és folytos a határán, akkor

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\varphi - t) dt,$$

ahol $P_r(\theta)$ a Poisson-magfüggvény:

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = \operatorname{Re} \frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} \quad (0 \leq r < 1).$$

12.1. Keressünk az alábbi tartományok között konform megfeleltetéseket (képleteket). (Használjunk hatvány-, exponenciális, logaritmus- és lineáris törtfüggvényeket.)



12.2. Melyik függvény harmonikus az alábbiak közül? Amelyik harmonikus, az melyik holomorf függvény valós része, és mi a harmonikus konjugáltja?

$$(x, y) \mapsto x; \quad (x, y) \mapsto x^2; \quad x^2 + y^2; \quad x^2 - y^2; \quad \log(x^2 + y^2); \quad \frac{y}{x^2 + y^2}$$

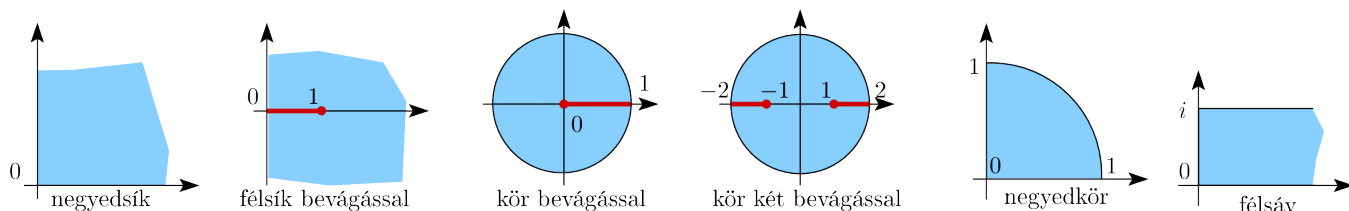
12.3. Igazoljuk, hogy harmonikus függvény parciális deriváltjai is harmonikusak.

12.4. Legyen n pozitív egész és $-1 < a < 1$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1-2a\cos t+a^2} dt =? \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nt)}{1-2a\cos t+a^2} dt =? \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log(5+4\cos t)}{1-2a\cos t+a^2} dt =?$$

Házi feladatok

12.5. Keressünk az alábbi tartományok között konform megfeleltetéseket.



12.6. Melyik függvény harmonikus az alábbiak közül? Amelyik harmonikus, az melyik holomorf függvény valós része, és mi a harmonikus konjugáltja?

$$(x, y) \mapsto y; \quad xy; \quad x^3y + xy^3; \quad x^3y - xy^3; \quad \frac{1-x^2-y^2}{1-2x+x^2+y^2}$$

12.7. A *Mikulás-szigetcsoport*tól körülbelül kétezer-négyszázhatvan kilométerre északra az Atlanti-óceán feneké kilyukadt, amikor belefűrődött a *Kazincbarcika* torpedóromboló. Az elfolyó víz miatt a felszínen stabil, nem örvénylő, forgásszimmetrikus víztölcsér keletkezett.

A tengelytől közepesen nagy távolságban, ahol a vízszintcsökkenés már mérhető, de a víz függőleges irányú sebessége még sokkal kisebb, mint a vízszintes irányú sebessége, a víztölcsér mélységét közelítőleg egy harmonikus függvény írja le. Mi lehet ez a függvény?

Másképpen fogalmazva: Legyen $D = \{z : r < |z| < R\}$. Írjuk fel az összes olyan $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely harmonikus D -n, folytonos \overline{D} -n, továbbá a két határkörön egy-egy konstans.

(Az egyértelűség indoklásához használjuk a maximum-elvet.)

(A *Kazincbarcika* torpedóromboló igaz történetéről Moldova György *A Lakinger Béla zsebcirkáló* c. sziporkájában olvashatunk.)

Szorgalmi feladatok, írásban beadható május 20-ig

Sz 12.1. Legyen $0 < a < 1$, és legyen a D holdacska az egységkörlemez és az $(a, 1/a)$ átmérőjű kör különbsége, és legyen f az a konform leképezés, ami D -t a jobb félsíkba viszi úgy, hogy $f(a) = \infty$ és $f(0) = 1$.

(a) Igazoljuk, hogy f tükrözésekkel kiterjeszthető az egész síkon meromorf függvénné.

(b) $f(1) = ?$

(c) Hol veszi még fel a (kiterjesztett) függvény az 1 értéket?

(d) Mutassuk meg, hogy f csak racionális törtfüggvény lehet.

(e) A függvény gyökei és pólusai alapján írjuk fel f -et képlettel.

Sz 12.2. Mutassuk meg, hogy ha egy kétváltozós valós polinom harmonikus, akkor egy komplex polinom valós része.

Sz 12.3. Legyen $\dot{B}(0,1) = \{z : 0 < |z| < 1\}$ a kilyukasztott egységkörlemez. Bizonyítsuk be, hogy ha $u : \dot{B}(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ harmonikus, akkor van olyan holomorf $f : \dot{B}(0,1) \rightarrow \mathbb{C}$ függvény és $c \in \mathbb{R}$ valós szám, amelyekre $u(z) = \operatorname{Re} f(z) + c \cdot \log |z|$.

