13. KFT gyakorlat, 2024. május 13. 14^{00}–15^{30} / május 15. 12^{05}–13^{35}

Poisson-formula: Ha $u(z)$ harmonikus az egységkörben, és folytos a határán, akkor

$$u\left(re^{i\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{it}\right) P_r\left(\varphi - t\right) \mathrm{d}t,$$

ahol $P_r\left(\theta\right)$ a Poisson-magfüggvény:

$$P_r\left(\theta\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = \operatorname{Re}\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} \qquad (0 \le r < 1).$$

13.1. Mondjuk ki, és igazoljuk a Liouville-tétel és a nyílt leképezés tétele harmonikus megfelelőit.

13.2. (a) Mutassunk példát olyan, az egész síkon harmonikus, nem konstans $u(z)$ függvényre, amelynek gyökei torlódnak a 0-ban.

(b) Igazoljuk, hogy ha D tartomány, $u : D \to \mathbb{R}$ harmonikus, és egy körlemezen $u = 0$, akkor az egész D-n $u = 0$.

13.3. Igazoljuk a kétváltozós Taylor-polinomok segítségével, hogy ha $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $u : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható, és D minden pontja körül elég kis körökre igaz a középérték-tulajdonság, akkor u harmonikus.

Szorgalmi feladatok, írásban beadható május 20-ig

Sz 13. Találjuk ki a felső félsíkon érvényes Poisson-formulát; konstruáljunk olyan, $x \in \mathbb{R}$ és $y > 0$ esetén érvényes $P_y(x)$ magfüggvényt, amire igaz, hogy ha a valós értékű $h(z)$ függvény harmonikus a felső félsík belsejében, továbbá folytonos és korlátos a felső zárt félsíkon, akkor bármely $x \in \mathbb{R}$ és $y > 0$ esetén

$$h(x + yi) = \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t)\, P_y(x - t)\, \mathrm{d}t.$$

Segítség: Tegyük fel hogy $f(z)$ egy olyan holomorf függvény, aminek a valós része u. Írjuk fel a Cauchy-formulát egy nagy félkörön, és adjunk hozzá egy holomorf függvényt (aminek a vonalintegrálja úgyis 0).