Komplex függvénytan ZH, 2024. március 25.

Mindegyik lapra írd rá a nevedet.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg. A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek.

Törekedj a rendezett, világos, jól olvasható leírásra. (Csak arra adunk pontot, amit nagyító nélkül is el tudunk olvasni.) Végeredmény közlése önmagában nem elegendő, megfelelő indoklás szükséges. Minden lényeges lépést le kell írni.

Semmilyen segédeszköz sem használható, számológép sem.

1. Írjuk fel az összes olyan $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amire az

$$f(x + yi) = xy + v(x, y)i$$

függvény holomorf.

2. Fejtsük Laurent-sorba az $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+3)}$ függvényt a -2 pont körül, az $1 < |z+2| < 3$ körgyűrűn.

3. Tegyük fel, hogy $f(w)$ és $g(w)$ holomorf az $|w| \le 1$ zárt egységkörlapon. Számítsuk ki

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \left(\frac{f(w)}{w-z} + \frac{g(w)}{1-zw} \right) \mathrm{d}w$$

értékét (a) $|z| < 1$; (b) $|z| > 1$ esetén.

4. Ábrázoljuk (vázlatosan) a következő halmazokat:

(a) $\left\{ \log z : \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad |z| < 2 \right\}$; (b) $\left\{ \log z : \quad |z-1| < 1 \right\}$.

(A log most a logaritmus főértéke: $-\pi < \operatorname{Im} \left(\log z \right) < \pi$.)

5. Határozzuk meg $\left| \cos z \right|$ maximumát az $|z| \le 1$ zárt egységkörlapon.

6. Az $f(z)$ egészfüggvényre $\operatorname{Re} f\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \cos \dfrac{1}{n}$, ha $n = 1, 2, \ldots$. Mi lehet $\operatorname{Re} f(-1)$?

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(z)$ holomorf a $\operatorname{Im} z \ge 0$ zárt félsíkon, és $\left| f(z) \right| \le \dfrac{1}{|z-i|}$, akkor $\left| f(i) \right| \le \dfrac{1}{2}$.