

Komplex függvénytan ZH, 2024. május 13.

Mindegyik lapra írd rá a nevedet.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontoszám is kapható. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontoszámmal egyezik meg. A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek.

Törekedj a rendezett, világos, jól olvasható leírásra. (Csak arra adunk pontot, amit nagyító nélkül is el tudunk olvasni.) Végeredmény közlése önmagában nem elegendő, megfelelő indoklás szükséges. Minden lényeges lépést le kell írni.

Semmilyen segédeszköz sem használható, számológép sem.

1. Mi legyen az A és a B konstans értéke, hogy az

$$x^5 + Ax^3y^2 + Bxy^4$$

függvény harmonikus legyen?

2. Hány gyöke van (multiplicitással számolva) a

$$p(z) = z^{21} + 1000z^{14} + 6793i$$

polinomnak

(a) $B(0, 2)$ -ben;

(b) $B(0, 10)$ -ben?

3.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = ?$$

(A végeredményben ne legyenek komplex számok.)

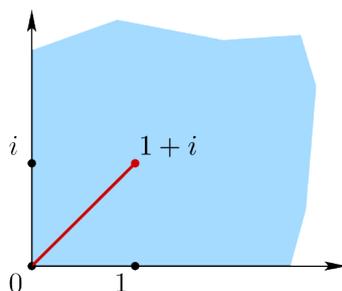
4.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^4 + 4} = ?$$

(A végeredményben ne legyenek komplex számok.)

5. Legyen a és b két különböző pont az egységkör belsejében. Írjuk fel az egységkörnek azt a φ konform automorfizmusát, amely felcseréli a -t és b -t, vagyis $\varphi(a) = b$ és $\varphi(b) = a$.

6. Adjunk meg konform megfeleltetést (képletet) az ábrán látható bevágott negyedsík és az egységkör között.



7. Tegyük fel, hogy $f(z)$ holomorf az egységkör belsejében, $f(0) = 0$ és $\operatorname{Re} f > -1$. Igazoljuk, hogy $|f'(0)| \leq 2$.