**Emlékeztető a valós analízis előadásokról (mat. BSC, „intenzív” szint), 2010. ősz**

**1. előadás, szeptember 14.**

Megbeszéltük az előadás játékszabályait. Tegeződünk, az előadások mindig óra 10-től 55-ig tartanak. Csütörtökön megbeszéljük a ZH időpontokat. Házi feladat elolvasni a ”Rövid történeti bevezetést” (tankönyv 7–14. oldal). A bevezetőből elmondtam, hogy képzelték el a deriválást és az integrálást, és hogy hányféle más mennyiséget használunk intuitívan, ami valójában valamilyen határérték. A logikai alapfogalmakat az utolsó 5 percben elkezdtük (állítás, zárt és nyitott állítás/mondat, és/vagy/tagadás/implikáció/ekvivalencia, a két kvantor).

**2-3. előadás, szeptember 16.**

Megbeszéltük a ZH időpontokat: november 5. 15-17 és december 10, 16-18. Megvoltak a logikai alapfogalmak, és a halmazok (TK 15–28) .

**4. előadás, szeptember 21.**

Megvoltak a függvények és sorozatok, kb. annyira részletesen, mint a könyvben (TK 26–29). Kimondtam a 9 és fél testaxiómát, bebzonyítottuk, hogy a 0 és az 1 egyértelmű, továbbá az ellentett és a reciprok egyértelmű. Definiáltuk a $-a$, $1/a$, $a-b$ és $a/b$ jelöléseket. Bebizonyítottuk, hogy $a \cdot 0 = 0$ (TK 32–34, 57–58). Néhány hasonló tételt a gyakorlaton kellene bizonyítani, ezeket a következő előadáson csak ki fogom mondani:

- ha $ab = 0$, akkor $a = 0$ vagy $b = 0$
- $-(-a) = a$
- $(a - b) - c = a - (b + c)$
- $-a = (-1) \cdot a$
- $(-a) \cdot b = -(ab)$
- $1/(a/b) = b/a$
- $(a/b) \cdot (c/d) = (a \cdot c)/(b \cdot d)$
- asszociatív műveletek átzárójelezhetősége

**5-6. előadás, szeptember 16.**

Megvoltak a rendezési axiómák, az Arkhimédészi és majdnem teljesen a Cantor-axióma (TK 34-39, 58-59). A gyökvonásra (2.6. tétel) már nem maradt idő.)

**7. előadás, szeptember 28.**

Megcsináltuk a gyökvonást (minden $a \geq 0$-hoz létezik pontosan egy $b \geq 0$, amire $b^k = a$) (TK 39-41). Definiáltuk a $k$-adik gyököt. Megvoltak a tizedestörtek (42–44).

**8-9. előadás, szeptember 29.**

Befejeztük a számegyenest, definiáltuk az intervallumokat és a "sűrű" fogalmát (TK 45–47). Elfelejtettem elmondani, hogy az irracionális számok halmaza sűrű. (Majd holnap.) Feladtam házi feladatnak, hogy minden konvex halmaz intervallum. (Gyakorlaton megbeszéljük.) Megvoltak a korlátos halmazok (TK 48–52). Definiáltuk az üres halmaz szuprémumát és infimumát is. Bebizonyítottuk, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}$ nemüres halmazok és $\forall a \in A \, \forall b \in B \; a \leq b$, akkor $\sup A \leq \inf B$.

A könyvben a 49. oldal 4. sora pontatlan, Helyesen:

($A$ véges <u>és nem üres</u>) $\Rightarrow$ ($\max A$ létezik) $\Rightarrow$ ($A$ felülről korlátos)

Bizonyítás nélkül elmondtam, hogy a 9 test + 4 rendezési axiómából és a teljességi tételből (axiómából) következik az arkhimédészi és a Cantor-axióma.

Elmeséltem, hogyan lehet oroszlánt fogni teljességi tétellel. Példának elkezdtük a k-adik gyököt, de még nem fejeztük be.

**10-11. előadás, szeptember 30.**

Befejeztük a gyökvonást teljességi tétellel.

Pótoltam, hogy az irracionális számok halmaz sűrű.

Megvolt a hatványozás elejétől a végéig (TK 53–56).

Elkezdtük a végtelen számsorozatokat. Definiáltuk a sorozatok alulról és felülről való korlátosságát, és a véges határértékeket (TK 61–65). Bebizonyítottuk a véges határérték egyértelműségét, és azt, hogy minden konvergens sorozat korlátos.

**12. előadás, október 12.**

Befejeztük az 3. fejezetet (TK 73. oldal végéig): megvoltak a végtelen határértékek, egységes határérték definíció környezetekkel, határérték és korlátosság kapcsolata, egyértelműség, az $n^p$, $a^n$, $\sqrt[n]{a}$ és $\sqrt[n]{n}$ határértéke.

**13-14. előadás, október 14.**

Elmondtam A határérték alaptulajdonságait (TK 74–76) és a Monoton sorozatokat. Definiáltuk az $e$ számot, de kimaradtak az $n!$ becslései (TK 90–94). Az alapműveletekkel a hányados sorozat határértékének végéig jutottunk el, a 4.20. tételre már nem maradt idő (TK 79–85).

**15. előadás, október 19.**

Definiáltuk a torlódási pontot, megengedve a végtelen torlódási pontot is. Definiáltuk számsorozat limsup-ját és liminf-jét. Bebizonyítottuk, hogy

– a limsup a legnagyobb, a liminf a legkisebb torlódási pont.

– $a_n \to \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\limsup = \liminf = \alpha$.

– $(a_n)$ akkor és akkor "oszcillálva" divergens, ha legalább két torlódási pontja van.

Az egyenlőtlenségek (határátmenet és rendőr-elv) csütörtökre maradtak. (Jegyzet 1–3)

**16–17. előadás, október 21.**

Elmondtam a jegyzet *Határérték és egyenlőtlenségek* c. részét.

Ezután jöttek a tankönyvől az Alkalmazások és a nagyságrendek (TK 86–89) Definiáltuk azt is, ha két végtelenhez tartó sorozat nagyságrendje ugyanaz ($0 < c_1 < \frac{a_n}{b_n} < c_2$). Kimondtam a Stirling-formulát (noha most még nincs $\pi$). Elmondtam, hogy a 0-hoz tartó sorozatok nagyságrendjét is lehet és érdemes definiálini.

Kimondtuk és kétféleképpen bizonyítottuk a Bolzano-Weierstrass tételt (TK 97). Első bizonyítás: mindig van monoton részsorozat. Második: $\limsup$ és a $\liminf$ véges torlódási pont.

Megbeszéltük, hogy a csúcselemek sorozata éppen a limsuphoz tart, ezért a két bizonyítás nem teljesen különöző.

Megvolt a Cauchy-kritérium (TK 99–100). A visszafelé irányt kétféleképpen bizonyítottuk (ld. TK, illetve jegyzet)

Az utolsó 5 percben nagyon röviden vázoltam, hogy hogyan lehet a racionális számok Cauchy-sorozatainak ekvivalencia-osztályaiként megkonstruálni a valós számok egy modelljét (TK 100). Ezzel befejeztük a sorozatok témáját.

### 18–19. előadás, november 4.

Megszámlálható halmaz. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ megszámlálható. Megszámlálható halmaz része és megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója megszámlálható. A pozitív egészekből álló véges sorozatok halmaza megszámlálható. (A sorozatok megszámozására többféle algoritmust mutathatunk, pl. $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$, vagy $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \underbrace{11\ldots1}_{a_1}0\underbrace{11\ldots1}_{a_2}0\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{a_n}$, amit valamilyen számrendszerben elolvasunk stb.) $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$, az algebrai számok halmaza megszámlálható (mindegyiket kódolhatjuk véges sorozatokkal vagy akár karaktersorozatokkal). A $[0, 1)$ nem megszámlálható (2 bizonyítás). Injektív, szürjektív és bijektív függvények. Halmazok számosságának összehasonlítása. Cantor-Schröder-Bernstein tétel (bizonyítás a gyakorlaton). Kontinuum. Egy végtelen és egy megszámlálható halmaz uniójának számossága. Az irracionális számok, transzcendens számok, nem elfajuló intervallumok, valamint $P(\mathbb{N})$ számossága kontinuum. Bármely $H$ halmazra $|H| < |P(H)|$ (bizonyítás a gyakorlaton). Nincs legnagyobb számosság. (TK 102–106)

Függvények, Értelmezési tartomány, képhalmaz, értékkészlet, injektív, szürjektív, bijektív függvény, inverz, kompozíció, grafikon, műveletek. Páros, páratlan és periodiuks függvények, alulról és felülről korlátos függvény, (szigorúan) monoton növő és csökkenő, illetve konvex és konkáv függvények. Ekvivalens feltételek a konvexitásra. Jensen-egyenlőtlenség. $x^2$ $\mathbb{R}$-en és $1/x$ $(0, \infty)$-en szigorúan konvex. (TK 108–109; TK 114–120)

### 20. előadás, november 9.

Megvolt a folytonosság és a féloldali folytonosság (TK 124–127). Megvolt a véges határérték véges helyen (128–133). Definiáltuk a pontozott környezetet és a $\dot{B}(a, r)$ jelölést.

### 21–22. előadás, november 11.

Felírtunk a határérték definíciójának $5 \times 3$-féle változatát és az egységes definíciót környezetekkel (TK 133–136). Definiáltuk halmaz torlódási pontját, a határértéket és a folytonosságot egy halmazra szorítkozva, és kimondtam a kettő kapcsolatát (TK 142–143).

Definiáltuk függvény limesz szuperiorát és limesz inferiorát halmazra szorítkozva és bebizonyítottuk a Jegyzet 3.1. és 3.2. részében leírt alaptulajdonságokat:

– $\limsup(-f) = -\liminf f$.

– Ha $b > \limsup_{\alpha,A} f$, akkor létezik $\alpha$-nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $\forall x \in \dot{U} \cap A$ $f(x) < b$.

– Ha $b < \liminf_{\alpha,A} f$, akkor létezik $\alpha$-nak olyan $\dot{U}$ pontozott környezete, hogy $\forall x \in \dot{U} \cap A$ $f(x) > b$.

– Ha $b < \limsup_{\alpha,A} f$, akkor $\alpha$-nak minden $\dot{U}$ pontozott környezetében $\exists x \in \dot{U} \cap A$ $f(x) > b$.

– Ha $b > \liminf_{\alpha,A} f$, akkor $\alpha$-nak minden $\dot{U}$ pontozott környezetében $\exists x \in \dot{U} \cap A$ $f(x) < b$.

– $\liminf_{\alpha,A} f \leq \limsup_{\alpha,A} f$.

– $\lim_{\alpha,A} f = \infty$ akkor és csak akkor, ha $\liminf_{\alpha,A} f = \infty$.

– $\lim_{\alpha,A} f = -\infty$ akkor és csak akkor, ha $\limsup_{\alpha,A} f = -\infty$.

– $\lim_{\alpha,A} f = b$ akkor és csak akkor, ha $\liminf_{\alpha,A} f = \limsup_{\alpha,A} f = b$.

– Akkor és csak akkor létezik $\lim_{\alpha,A} f$, ha $\liminf_{\alpha,A} f = \limsup_{\alpha,A} f$.

– A hatérérték egyértelmű.

**23. előadás, november 16.**

Bebizonyítottuk, hogy ha $\alpha$ torlódási pontja az $A$ és a $B$ halmazoknak, és $f$ értelmes valamilyen pontozott környezet és $A \cup B$ közös részén, akkor

$$\limsup_{\alpha, A\cap B} f = \max\Big(\limsup_{\alpha, A} f, \limsup_{\alpha, B} f\Big) \quad \text{és} \quad \liminf_{\alpha, A\cap B} f = \min\Big(\liminf_{\alpha, A} f, \liminf_{\alpha, B} f\Big).$$

Ennek két speciális esete:

$$\lim_{\alpha, A\cap B} f = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\alpha, A} f = \lim_{\alpha, B} f = \beta;$$
$$\lim_{a} f = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f = \beta;$$

Bebizonyítottuk a határátmenetet, majd felírtuk a rendőr-elv különböző változatait (a folytonosságról szólót is) bizonyítás nélkül, mondván, hogy minden bizonyítás szó szerint ugyanaz, mint a sorozatos tételeknél.

Kimondtuk és bebizonyítottuk a függvéyekre vonatkozó Cauchy-kritériumot.

**24-25. előadás, november 18.**

Megvoltak az átviteli elvek úgy, mint a jegyzetben, majd a határérték (folytonosság) és műveletek (alapműveletek, kompozíció és inverz) valamint új változó bevezetése úgy, mint a könyvben. (TK 146–147; 149–152)

**26. előadás, november 23.**

Elmondtam tömören a nagyságrendeket, beleértve a pozitív, 0-hoz tartó függvényekét is. Bebizonyítottuk, hogy $a > 1$, $b > 0$ és $x \to \infty$ esetén $x^b \prec a^x$ és $a^x \prec x^x$. (TK 152–153)

Elkezdtük a korlátos, zárt intervallumon folytonos függvényeket. Megvolt a Bolzano-tétel két bizonyítással, és ennek következményeként, hogy intervallum képe konvex, tehát intervallum. Kimondtam a Weierstrass-tételt, és megbeszéltük, hogy a feltételből nem hagyható el az, hogy az intervallum korlátos és zárt. (TK 159–160, 157)

**27-28. előadás, november 25.**

A Bolzano-Weierstrass tétellel bebizonyítottuk a Weierstrass tételt. Következményként kimondtuk, hogy korlátos, zárt intervallumon folytonos függvény korlátos, továbbá korlátos, zárt intervallum folytonos képe korlátos, zárt intervallum.

Definiáltuk számhalmaz belső, külső és határpontjait, belsejét, külsejét, határát, a nyílt és zárt halmazokat, és bebizonyítottuk, hogy egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha minden torlódási pontja eleme. Megbeszéltük, hogy a Weierstrass-tétel bizonyítása intervallum helyett valójában bármilyen korlátos, zárt, nem üres halmazra működik, és a tételt ilyen formában is kimondtuk.

Bebizonyítottuk Borel fedési tételét: $[a, b]$ minden nyílt fedése tartalmaz véges részfedést. (Az olyan $c \in [a, b]$ számok szuprémumát vettük, amelyekre az $[a, c]$ intervallumhoz van véges részfedés.) Ezek után definiáltuk a kompaktságot, és bebizonyítottuk, hogy $K \subset \mathbb{R}$ akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt. Bebizonyítottuk a Weierstrass-tételt a kompaktságból is.

Definiáltuk az egyenletes folytonosságot, és bebizonyítottuk a Heine-tételt korlátos, zárt halmazokra. Láttunk példákat arra, hogy nem zárt, illetve nem korlátos halmazon nem igaz a tétel ($1/x$ a $(0, 1)$-en, illetve $x^2$ $\mathbb{R}$-en).

Definiáltuk a Lipschitz-tulajdonságot. Ellenőriztük, hogy minden Lipschitz függvény egyenletesen folytonos, és láttunk példát arra, hogy ez fordítva nem igaz, még korlátos, zárt intervallumon sem ($\sqrt{x}$ a $[0, 1]$-en). Az ellenpéldákat csak felírtam, egyiket sem ellenőriztük.

**29. előadás, november 30.**

Megvoltak a Monotonitás és folytonosság, illetve Konvexitás és folytonosság c. fejezetek (TK 166–176).

Elmondtam a szakadási helyek típusait. *A könytől eltérően csak azokat a szakadási helyeket neveztem ugráshelynek, ahol a féloldali határértékek léteznek és végesek.* Ha ezt a definíciót használjuk, akkor például az $1/x$ függvénynek a 0-ban másodfajú szakadása van.

Bebizonyítottuk, hogy:

— ha $f$ monoton növekvő (csökkenő) az $(\alpha, \beta)$ nyílt intervalumon, akkor $\lim_{\alpha+0} f = \inf_{(\alpha,\beta)} f$ és $\lim_{\beta-0} f = \sup_{(\alpha,\beta)} f$ (a monoton csökkenő esetben $\lim_{\alpha+0} f = \sup_{(\alpha,\beta)} f$ és $\lim_{\beta-0} f = \inf_{(\alpha,\beta)} f$);

— Ha $c$ belső pontja az intervallumnak, akkor $\lim_{c-0} f \leq f(c) \leq \lim_{c+0} f$, és a két féloldali határérték is véges;

— Minden belső $c$ pont vagy folyonossági pont, vagy ugráshely;

— monoton függvénynek csak folytonossági pontjai és ugráshelyei vannak;

— csak megszámlálható sok ugráshely van;

— ha egy monoton függvény értékkészlete intevallum, akkor a függvény folytonos.

Tehát a 8.61. tételnek csak az (i) részét mondtam ki, és a 8.65. tételből is csak a nyílt halmaz képét mondtam ki.

Bebizonyítottuk, hogy minden konvex függvény folytonos az intervallum belsejében (sőt, bármely szűkebb intervallumon Lipschitz). Definiáltuk a gyenge és a szigorú gyenge konvexitást, bebizonyítottuk, hogy ha egy függvény gyengén konvex és felülről korlátos, akkor konvex, illetve ha szigorúan gyengén konvex és felülről korlátos, akkor szigorúan konvex.

**30–31. előadás, december 2.**

Megvolt a függvénygrafikon ívhosza (176–181) c. fejezet. Az $S(u)$ (alias arkusz koszinusz) függvényről elmondtam, hogy $0 < u < 1$ esetén

$$\sqrt{1-u^2} < S(u) \leq \frac{1}{u}\sqrt{1-u^2}.$$

A felső becslés abból jön ki, hogy a beírt töröttvonalat az origóból a $(1,0)$-beli érintőre vetítjük. Formálisan: $0 < p < q < 1$ esetén

$$\sqrt{(q-p)^2 + \left(\sqrt{1-p^2} - \sqrt{1-q^2}\right)^2} < \frac{\sqrt{1-p^2}}{p} - \frac{\sqrt{1-q^2}}{q}.$$

Elmondtam, hogy geometriai meggondolásokból ez triviális, de ki is lehetne számolni.

Bebizonyítottuk, hogy az exponenciális függvény folytonos, és ebből levezettük a hatványozás azonosságait a valós kitevőkre (az $(a^x)^y = a^{xy}$ azonosságot csak az $x, y > 0$ esetben).

Elkezdtük az elemi függvényeket. A polinomokról szóló algebrai tulajdonságokat csak megemlítettem, mert ezek algebrából úgy is voltak és jól ismertek. Megvoltak a polinomok és racionális törtek (182–184).

**32. előadás, december 7.**

Megvoltak az exponenciális függvények, a Bernoulli-egyenlőtlenség az általánosabb formájában, a hatványfüggvények (187–190). Definiáltuk a logaritmust (197-199). A logaritmus középiskolából jól ismert azonosságait csak kimondtuk. A logaritmus konvexitásának bizonyítása a következő előadásra maradt. (Az $e^x$ és a természetes logaritmus még nem volt.)

**33–34. előadás, december 9.**

Bebizonyítottuk, hogy a $\log_a$ függvény $a > 1$ esetén szigorúan konkáv, $0 < a < 1$ esetén pedig szigorúan konvex (TK 188). Igazoltuk, hogy $p \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ esetén $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log^p x}{x^\varepsilon} = 0$ és $\lim\limits_{x\to+0} x^\varepsilon \log^p x = 0$.

Bebizonyítottuk, hogy az $(1+1/x)^x$ és az $(1+1/x)^{x+1}$ függvény monoton, továbbá $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+1/x)^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+h)^{1/h} = e$ és $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+c/x)^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+ch)^{1/h} = e^c$ (TK 190–191).

Bebizonyítottuk, hogy $x \neq 0$ esetén $e^x > 1+x$, továbbá $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h-1}{h} = 1$ és $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\log(1+h)}{h} = 1$, majd definiáltuk a természetes logaritmust.

Definiáltuk a súlyozott hatványközepeket és bebizonyítottuk a súlyozott közepek közötti egyenlőtlenségeket (TK 194–196). Megmutattuk, hogy rögzített számok és súlyok mellett $b \to \pm\infty$ esetén $b$-edik hatványközép a legnagyobb, illetve legkisebb számhoz tart. Kimondtam bizonyítás nélkül, hogy $p \to 0$ esetén a $p$-edik hatványközép a mértani középhez tart, vagyis a hatványközép, mint $p$ függvénye, folytonos a 0-ban.

Az utolsó percekben még kimondtuk a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij és a Hölder-egyenlőtlenséget (TK 199–200).

**35. előadás, december 14.**

Bebizonyítottuk a Hölder-egyenlőtlenséget úgy, mint a könyvben. Felírtam az $|a_1+\ldots+a_n|^p \leq n^{p-1}(|a_1|^p+\ldots+|a_n|^p)$, illetve súlyozva $|w_1a_1+\ldots+w_na_n|^p \leq (w_1+\ldots+w_n)^{p-1}(|a_1|^p+\ldots+|a_n|^p)$ egyenlőtlenségeket, és elmondtam, hogy ezek a Hölder következményei ill. átfogalmazásai, de sokszor ezeket is „Hölder egyenlőtlenségnek” nevezik. Ugyanakkor ebből az alakból is jól látszik, hogy a Hölder, illetve a számtani és a $p$-edik hatványközepek közötti egyenlőtlenség lényegében ugyanaz.

A Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenségről elmondtam, hogy az egyenlőség feltétele, hogy $a_1 : a_2 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : \ldots : b_n$. Elmondtam, hogy a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkijt az $(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2) = \sum\limits_{i<j}(a_ib_j-a_jb_i)^2$ azonosságból is lehetne bizonyítani, az egyenlőség esete ebből is leolvasható.

Rátértünk a trigonometrikus függvényekre. Definiáltuk a trigonometrikus függvényeket, felírtuk a szinusz- és a koszinuszfüggvény legegyszerűbb tulajdonságait (periodicitás, $\sin(x+\pi/2)$, $\cos(x+\pi/2)$ stb.). Vázoltam az addíciós képletek bizonyítását.

**36–37. előadás, december 16.**

Kiosztottam egy rövid azonossággyűjteményt a trigonometrikus és az arkusz függvényekről (jegyzet 6. rész). Az azonosságokat nem bizonyítottuk, csak használtuk.

Megbeszéltük a trigonometrikus és az arkusz függvények legfontosabb tulajdonságait, és felrajzoltuk a grafikonokat, mint a könyben. A konvexitást egy-egy intervallumon bizonyítottuk. Bebizonyítottuk, hogy $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ és $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x} = 0$.

Definiáltuk a hiperbolikus és az area függvényeket, megbeszéltük a fontosabb tulajdonságokat (határértékek, monotonitás, konvexitás).

Végül definiáltuk az elemi függvényeket.