Valós analízis gyakorlat, 2010. szeptember 30.

1. Korlátosak-e alulról, illetve felülről a következő halmazok? Mi a maximumuk, minmimumuk, szuprémumuk és az infimumuk? Melyik konvex?

$$\emptyset \qquad \{1,2,3,\dots\} \qquad \{1,-1/2,1/3,-1/4,1/5,\dots\} \qquad \mathbb{Q} \qquad \mathbb{R} \qquad [1,2) \qquad (2,3] \qquad [1,2)\cup(2,3]$$

2. Ismert, hogy ha n elég nagy pozitív egész, akkor n^3 és $(n+1)^3$ között mindig van prímszám. Bizonyítsuk be ennek felhasználásával, hogy létezik olyan a pozitív valós szám, amire tetszőleges n pozitív egész esetén $\left[a^{3^n}\right]$ prímszám.

3. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben teljesül teljességi axióma, akkor teljesül az arkhimédészi axióma is.

4. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz a teljességi axióma, akkor teljesül a Cantor-axióma is.

5. (a) Mutassunk példát olyan konvex halmazra a racionális tört függvények testében, ami nem intervallum.
(b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ minden konvex részhalmaza intervallum.

6. (a) Legyen I_α $(\alpha \in A)$ korlátos, zárt intervallumok egy rendszere úgy, hogy közülük bármelyik kettőnek létezik közös pontja. Igazoljuk, hogy $\bigcap\limits_{\alpha\in A} I_\alpha \neq \emptyset$. (1-dimenziós Helly-tétel)
(b) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok zártak?
(c) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok korlátosak?

7. Tetszőleges x_1-re definiáljuk rekurzívan az $x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$ sorozatot. Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan x_1 létezik, amire $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ bármely n esetén.

(IMO 1985/6)

Házi feladatok

8. Milyen $H \subset \mathbb{R}$ halmazokra igaz, hogy
(a) $\inf H < \sup H$;
(b) $\inf H = \sup H$;
(c) $\inf H > \sup H$?

9. A H halmaz *sehol sem sűrű*, ha

$$\forall a < b \left(\exists c,d \left(a < c < d < b \ \wedge\ H \cap (c,d) = \emptyset\right)\right).$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $S_1, S_2, \dots$ sehol sem sűrű halmazok egy tetszőleges sorozata, akkor $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n}$ sűrű.

10. Legyen K zárt intervallum, és I_α $(\alpha \in A)$ nyílt intervallumoknak egy olyan rendszere, amire $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$. Igazoljuk, hogy van olyan véges $B \subset A$ halmaz, amire $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in B} I_\alpha$. (Borel fedési tétele)

11. Legyen $(R, <)$ egy rendezett halmaz (egy R halmaz, és rajta egy $<$ trichotóm és tranzitív kétváltozós reláció). Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek:

(a) R-ben minden felülről korlátos és nem üres halmaznak létezik legkisebb felső korlátja;

(b) R-ben minden alulról korlátos és nem üres halmaznak létezik legnagyobb alsó korlátja;

(c) R-ben igaz az 1-dimenziós Helly-tétel.

12.* Létezik-e olyan rendezett test, amiben teljesül a Cantor-axióma, de nem teljesül az arkhimédészi axióma?