Valós analízis gyakorlat, 2010. október 7.

Régi házi feladatok

1. Egy H halmazt nevezzünk *zárt*nak, ha a komplementere nyílt. Melyik halmaz zárt az alábbiak közül?

$$\emptyset; \qquad \mathbb{R}; \qquad (a,b); \qquad [a,b]; \qquad \mathbb{Q}; \qquad \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$$

2. Lehet-e x, y irracionális számok esetén x^y racionális?

3. Igazoljuk, hogy
a) akárhány zárt halmaz metszete is zárt;
b) véges sok zárt halmaz uniója is zárt.

4. A Cantor-axióma felhasználásával adjunk közvetlen bizonyítást arra, hogy az irracionális számok halmaza sűrű.

5. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett test összefüggő, akkor a testben igaz az Arkhimédészi és a Cantor-axióma is.

Feladatok

6. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz Borel fedési tétele, akkor a test izomorf a valós számok testével.

7. Legyen K korlátos, zárt halmaz, és I_α ($\alpha \in A$) nyílt halmazoknak egy olyan rendszere, amire $K \subset \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$. Igazoljuk, hogy van olyan véges $B \subset A$ halmaz, amire $K \subset \bigcup_{\alpha\in B} I_\alpha$ (Minden korlátos, zárt halmaz kompakt.)

8. Igazoljuk, hogy minden nyílt halmaz $\mathbb{R}$-en előáll, mint megszámlálható sok nyílt intervallum egyesítése.

9. Egy halmazt nevezzünk G_δ-nak, ha előáll, mint megszámlálható sok nyílt halmaz metszete.
Bizonyítsuk be, hogy
a) Az irracionális számok halmaza G_δ.
b) A racionális számok halmaza nem G_δ.

10. Legyen $(R, <)$ egy rendezett halmaz (egy R halmaz, és rajta egy $<$ trichotóm és tranzitív kétváltozós reláció). Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek:
(a) R-ben minden felülről korlátos és nem üres halmaznak létezik legkisebb felső korlátja;
(b) R-ben minden alulról korlátos és nem üres halmaznak létezik legnagyobb alsó korlátja;
(c) R minden konvex részhalmaza intervallum.
(d) R-ben igaz az 1-dimenziós Helly-tétel;
(e) R összefüggő;
(f) R minden intervalluma összefüggő.
(Adjunk közvetlen bizonyítást az $(a) \Rightarrow (b)$, $(a) \Rightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (b)$, $(d) \Rightarrow (c)$ stb. implikációk közül minél többre.)