Valós analízis gyakorlat, 2010. október 14.

1. Mi az alábbi sorozatok határértéke? Ellenőrizzük a definíciót! Mutassunk küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-6}$-hoz, $P = 10^6$-hoz, illetve $P = -10^6$-hoz.

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}; \qquad n^2 - n^3; \qquad n\big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\big); \qquad \sin n$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sorozat ∞-hez tart, akkor van legkisebb eleme.

3. Tegyük fel, hogy $a_n \to -\infty$, és legyen $b_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. Mutassuk meg, hogy $b_n \to -\infty$.

4. Legyen a valós szám.

$$\lim \left(\sqrt{n^2-n+1} - an\right) = ?$$

5. Mutassunk példákat olyan a_n sorozatra, amelyre $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ és

(a) a_n konvergens;
(b) $a_n \to \infty$;
(c) $a_n \to -\infty$;
(d) a_n "oszcillálva" divergens.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_n \to \infty$, akkor $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \to \infty$.

7.

$$\lim \frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = ?$$

Házi feladatok

8. Mi az alábbi sorozatok határértéke? Ellenőrizzük a definíciót! Mutassunk küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-6}$-hoz, $P = 10^6$-hoz, illetve $P = -10^6$-hoz.

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n}; \qquad \sqrt{n+1}-n$$

9. Bizonyítsuk be, hogy ha egy sorozat $(-\infty)$-hez tart, akkor van legnagyobb eleme.

10. Legyen a valós szám.

$$\lim \left(\frac{n^2+n+1}{n+2} - an\right) = ?$$

11. Bizonyítsuk be, hogy ha $\forall n\ a_n > 0$ és $a_n \to b$, akkor $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \to b$.