Valós analízis gyakorlat, 2012. szeptember 21.

1. Cseréljük a rendezési axiómákat a következőkre.

R1'. Minden valós szám vagy 0, vagy pozitív, vagy negatív.

R2'. x akkor és csak akkor pozitív, ha $-x$ negatív.

R3'. Bármely két pozitív szám összege pozitív.

R4'. Bármely két pozitív szám szorzata pozitív.

Ezek után a $<$ relációt definiáljuk a következőképpen: $a < b$ akkor és csak akkor, ha $b - a$ pozitív. Mutasssuk meg, hogy ezekből következnek az eredeti rendezési axiómák.

2. Egy valós együtthatós, racionális törtfüggvényt (két polinom hányadosát) nevezzünk pozitívnak, ha a számláló és a nevező főegyütthatója azonos előjelű. Ellenőrizzük, hogy ezzel a rendezéssel a racionális törtfüggvények rendezett testet alkotnak.

3. Igazoljuk, hogy minden valós számnál van nagyobb kettőhatvány.

4. Teljesül-e a racionális törtfüggvények rendezett testében az Arkhimédészi axióma?

5. Mutassuk meg, hogy ha egy rendezett testben $\mathbb{Q}$ sűrű, akkor a test arkhimédészi.

6. A Cantor-axiómában megköveteltük, hogy az egymásba skatulyázott intervallumsorozat korlátos, zárt és nemüres intervallumokból álljon. Ellenőrizzük, hogy a Cantor-axióma állítása nem marad igaz, ha bármelyik feltételt elhagyjuk.

7. Legyen $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$. Igazoljuk, hogy minden P valós számhoz van olyan n pozitív egész, emire $a_n > P$.

8. Ismert, hogy ha n elég nagy pozitív egész, akkor n^3 és $(n+1)^3$ között mindig van prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan a pozitív valós szám, amire tetszőleges n pozitív egész esetén $\left[a^{3^n}\right]$ prím.

(KöMaL)

Házi feladatok

9. Olvassátok el a *Hogyan fogjunk oroszlánt?* c. cikket (`http://www.komal.hu/cikkek/kg/oroszlan/oroszlan.h.shtml`).

10. Igazoljuk, hogy minden pozitív valós számnál van kisebb pozitív racionális szám.

11. Milyen rendezett testekben értelmezhetjük az egészrészfüggvényt?

12. Bizonytsuk be, hogy ha egy rendezett testben van olyan intervallum, amiben $\mathbb{Q}$ sűrű, akkor a test arkhimédészi.

13. Teljesül-e a racionális törtfüggvények rendezett testében a Cantor-axióma?

14. Tetszőleges x_1-re definiáljuk rekurzívan az $x_{n+1} = x_n\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$ sorozatot. Igazoljuk, hogy pontosan egy olyan x_1 létezik, amire $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ bármely n esetén.

(IMO 1985/6)