Valós analízis gyakorlat, 2012. szeptember 26.

Első ZH: október 19., péntek, 12–14 (gyakorlat helyett)

Második ZH: december 10., hétfő, 14–16 (előadás helyett)

1. Az előadáson hallott bizonyítás mintájára, a Cantor és az Arkhimédészi axiómából bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a > 0$ valós számhoz és k pozitív egészhez pontosan egy olyan $b > 0$ valós szám létezik, amire $a = b^k$.

2. Az *1-dimenziós Helly-tétel* szerint ha I_α $(\alpha \in A)$ korlátos, zárt intervallumok egy rendszere úgy, hogy közülük semelyik kettő metszete nemüres, akkor az összes I_α metszete sem üres.

(a) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok zártak?

(b) Igaz marad-e az 1-dimenziós Helly-tétel, ha nem kötjük ki, hogy az intervallumok korlátosak?

(c) Igaz-e az 1-dimenziós Helly-tétel a racionális számok testében?

(d) A Cantor-axióma segítségével igazoljuk az 1-dimenziós Helly-tételt. (Segítség: egy x valós számot nevezzünk *túl kicsi*nek, ha $\exists \alpha \in A\ I_\alpha \subset (x, \infty)$, illetve *túl nagy*nak, ha $\exists \alpha \in A\ I_\alpha \subset (-\infty, x)$. Olyan számot keresünk, ami sem nem túl kicsi, sem nem túl nagy.)

3. (a) Igazoljuk, hogy minden intervallum konvex.

(b) Legyen T nem arkhimédészi rendezett test, és $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} [0, n]$. Igazoljuk, hogy a K halmaz konvex, de nem intervallum.

(c) Mutassunk példát a racionális számok testében olyan konvex halmazra, ami nem intervallum.

4. Egy H halmazt nevezzünk *nyílt*nak, ha $\forall a \in H \quad \exists b, c \quad a \in (b, c) \subset H$. Melyik nyílt az alábbi halmazok közül?

$$\emptyset \qquad \mathbb{R} \qquad (a, b) \qquad [a, b] \qquad [1, 2] \cup [3, 4] \qquad [1, 2] \cup [3, 4] \qquad \mathbb{Q} \qquad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

5. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt nevezzünk *összefüggő*nek, ha tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}$ diszjunkt nyílt halmazok esetén $H \subset (A \cup B) \Rightarrow (H \subset A \vee H \subset B)$. Bizonyítsuk be, hogy

a) $\mathbb{R}$ összefüggő;

b) $\mathbb{R}$ minden konvex részhalmaza összefüggő.

c) a racionális tört függvények teste nem összefüggő.

6. Legyen R rendezett test, $A = \{x \in R : \ x^2 > 2\}$ és $B = \{x \in R : \ x^2 < 2\}$.

(a) Mutassuk meg, hogy az A és B halmazok nyíltak.

(b) Mutassuk meg, hogy ha R összefüggő, akkor van olyan $a \in R$, amire $a^2 = 2$.

7. A Cantor-axióma felhasználásával adjunk közvetlen bizonyítást arra, hogy az irracionális számok halmaza sűrű.

Házi feladatok

8. Ismert, hogy ha n elég nagy pozitív egész, akkor n^3 és $(n+1)^3$ között mindig van prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan a pozitív valós szám, amire tetszőleges n pozitív egész esetén $\left[a^{3^n}\right]$ prím.

(KöMaL)

9. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz *sehol sem sűrű*, ha $\forall a, b \in \mathbb{R} \left(\exists c, d \in \mathbb{R} \left(a < c < d < b \ \wedge \ H \cap (c, d) = \emptyset\right)\right)$. Bizonyítsuk be, hogy ha $S_1, S_2, \ldots$ sehol sem sűrű halmazok egy tetszőleges sorozata, akkor $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ nem tartalmaz intervallumot. (Baire féle kategóriatétel)

10. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz az 1-dimenziós Helly-tétel, akkor a testben igaz az Arkhimédészi és a Cantor-axióma is, tehát a test izomorf a valós számok testével.

11. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett test összefüggő, akkor izomorf $\mathbb{R}$-rel.