Valós analízis gyakorlat, 2012. november 14.

1. Mik a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ halmazok izolált, illetve torlódási pontjai?

2. Legyen α az A és B halmazok közös torlódási pontja, és f valós értékű függvény, ami értelmes az α egy pontozott környezetében. Igazoljuk, hogy

$$\overline{\lim_{\alpha,A\cup B}} f = \max\Big(\overline{\lim_{\alpha,A}} f, \overline{\lim_{\alpha,B}} f\Big), \qquad \text{és} \qquad \underline{\lim_{\alpha,A\cup B}} f = \min\Big(\underline{\lim_{\alpha,A}} f, \underline{\lim_{\alpha,B}} f\Big).$$

3. Írjuk fel a Cauchy-kritériumot $\varepsilon, \delta, K, L$ stb. betűkkel az $\alpha = 1$, $\alpha = a + 0$, $\alpha = -\infty$ esetekben!

4. Ellenőrizzük a Cauchy-kritériumot az $\lim\limits_{x\to+0} \sqrt{x}$ határértékre.

5. Igazoljuk, hogy ha az $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvényre $\forall\varepsilon > 0\ \exists K > 0\ \forall x, y > K\ |f(x) - f(y)| < \dfrac{1}{|x|}$, akkor $\lim\limits_{\infty} f$ létezik és véges.

6. Az f függvény "Lipschitz tulajdonságú", ha $\exists K \in \mathbb{R}\ \ \forall x, y \in D(f)\ \ |f(x) - f(y)| \le K|x - y|$. Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz az a pont egy környezetében, akkor ott folytonos is.

7. Igazoljuk, hogy minden nem üres perfekt halmaz kontinuum számosságú.

8. Nevezzünk egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt *perfekt*nek, ha zárt, és nincs izolált pontja. Igazoljuk, hogy minden zárt halmaz felbontható egy megszámlálható és egy perfekt halmaz uniójára.

Házi feladatok

9. Írjuk fel a Cauchy-kritériumot $\varepsilon, \delta, K, L$ stb. betűkkel az $\alpha = 0$, $\alpha = a - 0$, $\alpha = \infty$ esetekben!

10. Ellenőrizzük a Cauchy-kritériumot az $\lim\limits_{x\to\infty} \{x\}$ határértékre.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz tulajdonságú az $(a, a + \delta_0)$ intervallumban, akkor $\lim\limits_{a+0} f$ létezik és véges.

12. Bizonyítsd be, hogy ha $f : (0,1) \to (0,\infty)$, és minden x, y-ra $f(x) < (1 + y)f(y)$, akkor f-nek véges jobboldali határértéke van a 0-ban.

13. Legyen α torlódási pontja az A halmaznak, és legyen f értelmes az A és az α hely egy pontozott környezetének közös részében. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan $B, C \subset A$ halmazok, amelyeknek α torlódási pontja, továbbá

$$\underline{\lim_{x\to\alpha,\ x\in A}} f(x) = \lim_{x\to\alpha,\ x\in B} f(x) \quad \text{és} \quad \overline{\lim_{x\to\alpha,\ x\in A}} f(x) = \lim_{x\to\alpha,\ x\in C} f(x).$$

14. Legyen $f : [a, b] \to [a, b]$ folytonos függvény, és legyen $p \in [a, b]$. Definiáljuk a $p_0, p_1, \ldots$ sorozatot a $p_0 = p$, $p_{n+1} = f(p_n)$ rekurzióval. Igazoljuk, hogy ha a $T_p = \{p_n :\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ halmaz zárt, akkor véges.

(IMC)