Valós analízis gyakorlat, 2012. november 21.

1. Igazoljuk, hogy minden páratlan fokú, valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

2. Igazoljuk, hogy ha $f : [a, b] \to [a, b]$ folytonos, akkor létezik olyan $c \in [a, b]$, amire $f(c) = c$. Igaz-e ez az állítás $(a, b) \to (a, b)$ függvényekre?

3. Mutassunk példát arra, hogy a Bolzano-Darboux tétel nem igaz a racionális törtfüggvények rendezett testében.

4. Vezessük le a Bolzano-Darboux tételt abból, hogy minden intervallum összefüggő.

5. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz a Bolzano-Darboux tétel, akkor a test izomorf $\mathbb{R}$-rel.

6. Mutassunk példát arra, hogy a Weierstrass-tétel nem igaz a racionális számok rendezett testében.

7. Igazoljuk, hogy ha $K \subset \mathbb{R}$ korlátos, zárt, nem üres, akkor minden folytonos $K \to \mathbb{R}$ függvénynek van legnagyobb és legkisebb értéke.

8. Vezessük le a Weierstrass-tételt Borel fedési tételéből.

9. Nevezzük az f függvényt *felülről félig folytonos*nak (rövidítve: f.f.f.) az a pontban, ha $\exists \delta_0 > 0\, B(a, \delta_0) \subset D(f)$ és $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ f\big(B(a, \delta)\big) \subset \big(-\infty, f(a) + \varepsilon\big)$. Hasonlóan, nevezzük f-et *alulról félig folytonos*nak (a.f.f.) az a pontban, ha $\exists \delta_0 > 0\ B(a, \delta_0) \subset D(f)$ és $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ f\big(B(a, \delta)\big) \subset \big(f(a) - \varepsilon, \infty\big)$.

(Lásd még: balról felülről félig folytonos, a.f.f. az A halmazra szorítkozva stb. :-P)

Igazoljuk, hogy ha egy függvény f.f.f. egy korlátos, zárt, nem üres intervallumon, akkor van legnagyobb értéke.

Házi feladatok

10. Igazoljuk, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$, akkor létezik olyan $c \in [a, b]$, amire $f(c) = \dfrac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$.

11. Igazoljuk, hogy ha I intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív, akkor szigorúan monoton.

12. Mutassunk példát arra, hogy a Bolzano-Darboux tétel nem igaz a racionális számok rendezett testében.

13. Mutassunk példát arra, hogy a Weierstrass-tétel nem igaz a racionális törtfüggvények rendezett testében.

14. Minden pozitív a-hoz és k pozitív egészhez van olyan pozitív b, amire $a = b^k$. Vezessük le ezt az állítást a Weierstrass-tételből is.

15. Vezessük le a Bolzano-Darboux tételt a legkisebb felső korlát tételéből.

16. Igazoljuk, hogy ha egy rendezett testben igaz a Weierstrass-tétel, akkor a test izomorf $\mathbb{R}$-rel.