Valós analízis gyakorlat, 2012. november 30.

1. Melyik nagyobb? $5^{\log_7 3}$ vagy $3^{\log_7 5}$?

2. Igazoljuk, hogy $x \neq 0$ esetén $e^x \geq 1 + x$, és $x > -1$, $x \neq 0$ esetén $e^x < 1 + \dfrac{x}{1-x}$.

3. Igazoljuk, hogy $0 < x$, $x \neq 1$ esetén $\ln x < x - 1$.

4. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

5. Az $e^t > 1 + t$ egyenlőtlenség n-edik hatványra emelésével igazoljuk, hogy ha $x > 0$, akkor

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

6. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ és $\lim\limits_{x\to +0} x \cdot \ln x = 0$.

7.

$$\lim_{x\to +0} x^x = ? \qquad \lim_{x\to +\infty} \sqrt[x]{x} = ?$$

8. Mutassuk olyan a valós számot, amire $|x| < \frac{1}{2}$ esetén $e^x < 1 + x + ax^2$.

9.

$$\lim_{x\to +0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = ?$$

10. Igazoljuk, hogy ha $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ folytonos és tetszőleges $x, y > 0$ esetén $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, akkor f hatványfüggvény.

Házi feladatok

11. Igazoljuk, hogy $0 < x < 1$ esetén $\ln x > 1 - \dfrac{1}{x}$.

12. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$, $a > 1$ és $K \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x\to +0} x^\varepsilon \cdot \log_a^K x = 0$ és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a^K x}{x^\varepsilon} = 0$.

13.

$$\lim_{x\to -0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = ?$$

14. Mutassuk olyan a valós számot, amire $|x| < \frac{1}{2}$ esetén $\ln(1+x) \geq x - ax^2$.

15. Igazoljuk, hogy $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$e^x > 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$