Valós analízis gyakorlat, 2012. december 7.

1. Mekkora az $[x]$ függvény ívhossza a $[0,2]$ intervallumban?

2. Legyen $(q_1, q_2, \ldots)$ a $(0,1)$-beli racionális számok egy sorbarendezése, valamint $f(q_n) = \frac{1}{2^n}$, $f(0) = f(1) = 0$ és $f(x) = 0$ ha x irracionális. $s(f,[0,1]) =?$

3. Van-e olyan $[a,b]$-n egyenletesen folytonos függvény, melynek ívhossza végtelen?

4. Bizonyítsuk be, hogy ha f grafikonja rektifikálható az $[a,b]$ intervallumon, akkor minden a-tól különböző pontban létezik és véges a baloldali határértéke, illetve minden b-től különböző pontban létezik és véges a jobboldali határértéke.

5. Igazoljuk, hogy a $\operatorname{tg} x$ függvény szigorúan konvex a $[0, \pi/2)$ intervallumon.

6. (a) Igazoljuk, hogy $x \neq k\pi$ esetén

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

(b)

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx =?$$

7. Bizonyítsuk be, hogy minden nemnegatív egész n-hez léteznek olyan, n-edfokú $T_n(x)$ és $U_n(x)$ polinomok, amelyekre

$$T_n(\cos t) = \cos nt, \quad \text{illetve} \quad U_n(\cos t) = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t},$$

továbbá

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{és} \quad U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

(Ezek az úgynevezett Csebisev-polinomok.)

Házi feladatok

8. Igazoljuk, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ grafikonja rektifikálható, akkor f korlátos.

9. Létezik-e olyan folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, aminek grafikonja semmilyen nem elfajuló intervallumban nem rektifikálható?

10. Bizonyítsuk be, hogy ha f Lipschitz az $[a,b]$ intervallumban, akkor a grafikonja rektifikálható.

11. (a) Fejezzük ki $\sin x$-et és $\cos x$-et csak $\operatorname{tg} x$-szel.

(b) Fejezzük ki $\sin x$-et és $\cos x$-et csak $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$-vel.

(c) Fejezzük ki $\sin x$-et és $\cos x$-et csak $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$-vel.

12. Egy legfeljebb n-edfokú p polinomra tetszőleges $x \in [-1,1]$ esetén $|p(x)| \leq 1$. Igazoljuk, hogy $x > 1$ esetén $|p(x)| < T_n(x)$.