Elemi matematika gyakorlat, 2012. szeptember 19.

1. Oldjuk meg a pozitív egészek halmazán az $abc + ab + ac + bc - a - b - c = 50$ egyenletet.

KöMaL fórum alapján

2. Melyek azok a kétjegyű, páros $\overline{ab}$ számok, amelyek ötödik hatványa $\overline{ab}$-re végződik?

(Tanárképző főiskolák matematika versenye, 1973; KöMaL)

3. Tegyük fel, hogy a, b, n, k pozitív egészek, n páratlan, p páratlan prímszám, és $a^n + b^n = p^k$. Igazoljuk, hogy az n a p-nek nemnegatív egész kitevős hatványa.

KöMaL

4. Oldjuk meg az egész számhármasok halmazán az

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 9xyz$$

egyenletet.

Kürschák

5. Milyen n, k nemnegatív egészekre teljesül, hogy $2^n - 1 = 3^k$?

Arany D.

6. Tetszőleges pozitív egész m-re jelölje $s(m)$ az m számjegyeinek az összegét. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egészt, amelynek egyetlen számjegye sem nulla, és teljesíti az

$$s(n^2) = 2^{s(n)}$$

összefüggést.

KöMaL

7. Igazoljuk, hogy ha $0 < a < b < c < d$ olyan páratlan egész számok, amikre $a + d$ és $b + c$ is 2-hatvány, továbbá $ad = bc$, akkor $a = 1$.

Olimpia

8. Legyenek a és b olyan pozitív egész számok, hogy minden n pozitív egész számra $a^n + n$ osztója $b^n + n$-nek. Igazoljuk, hogy $a = b$.

KöMaL

9. Igazoljuk, hogy ha $a > 1$, x, y pozitív egészek és $axy - 1 | (ax^2 - 1)^2$, akkor $x = y$.

Olimpia