Elemi matematika gyakorlat, 2012. szeptember 26.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 111...1 alakú szám osztható 7-tel, akkor osztható 37-tel is.
(KöMaL)

2. a) Igazoljuk, hogy minden n pozitív egész számra $3^{2^n}-1$ osztható 2^{n+2}-nel, de nem osztható 2^{n+3}-nal.

b) Mutassuk meg, hogy bármely n pozitív egész számra $2^{3^n}+1$ osztható 3^{n+1}-nel, de nem osztható 3^{n+2}-nel.

3. Legyen u_n az n-edik Fibonacci-szám ($u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$). Igazoljuk, hogy $u_{n+1}u_k - u_n u_{k+1} = \pm u_{n-k}$.

4. Legfeljebb hányat lehet kiválasztani az $1, 2, \ldots, 2010$ számok közül úgy, hogy együk se legyen osztója semelyik másiknak?

5. A $P_1, P_2, \ldots, P_{31}$ pontok az 10×10-es négyzetben vannak. Igazoljuk, hogy ezekhez létezik olyan Q pont, amire $P_1Q, P_2Q, \ldots, P_{31}Q$ mindegyike nagyobb, mint 1.

6. Adott ($n \geq 3$) számú szakasz, mindegyik legalább egységnyi hosszú. Tudjuk, hogy akármelyik k darabot ($k = 3, 4, \ldots, n$) választjuk is ki közülük, ezek nem lehetnek egy sokszög oldalai. Igazoljuk, hogy a szakaszok összhossza nagyobb, mint 2^{n-1}.

7. Az egységkörnek megrajzoltuk n húrját. Igazoljuk, hogy a kör belsejében van olyan pont, ami mindegyik húrtól legalább $1/n$ távolságra van.
(KöMaL)

8. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} > 0$, akkor az $a_i + a_j$ ($1 \leq i < j \leq 100$) összegek közül legalább 99 pozitív.
(KöMaL)

9*. Legyen $f(n) = 2^n + 1$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha $n \mid f(n)$, akkor $n \mid f(f(n))$.

(b) Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan pozitív egész n létezik, amire $n \mid f(f(n))$, de $n \nmid f(n)$. (RMM 2012)

(c) Létezik-e [végtelen sok] olyan pozitív egész n, amire $n \mid f(f(n))$, de $n \nmid f(f(f(n)))$? (KöMaL)