Elemi matematika gyakorlat, 2012. október 17.

1. Sándor Mátyás esetéből okulva, a hazafiak vezére egy egyenletet küldött barátainak:

$$2x^2 + 4xy + 7y^2 - 12x - 2y + N = 0.$$

A titkos üzenet az volt, hogy a hónap N. napján legyen a felkelés. A hazafiak gyakran mondogatták, hogy a felkelés az egyetlen megoldás. Ez jellemzte N-et is: az egyenletet egyetlen (x, y) valós számpár elégítette ki. Mennyi N értéke?

KöMaL

2. Mit kapunk maradékul, ha az x^{2001} polinomot elosztjuk $(x+1)^2$-nel?

KöMaL

3. Legyen $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, és legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy olyan függvény, amelyre tetszőleges pozitív egész n esetén

$$\big|f(n) - qn\big| < \frac{1}{q}.$$

Igazoljuk, hogy $f(f(n)) = f(n) + n$.

KöMaL

4. Az f polinomra teljesül, hogy $f(x^2+1) - f(x^2-1) = 4x^2 + 6$. Határozzuk meg az $f(x^2 + 1) - f(x^2)$ polinomot.

KöMaL

5. Határozzuk meg azon p, q pozitív prímeket, amelyekre az $x^4 + p^2x + q = 0$ egyenletnek van többszörös gyöke.

KöMaL, Besenyei Ádám

6. Egy nagy, önkiszolgáló raktárban rengeteg árut tárolnak legfeljebb 1 tonnás csomagokban. Van egy 3 és egy 4 tonnás teherautónk. Szerződést akarunk kötni, amelyben vállaljuk, hogy a raktárból egy fordulóval legalább N tonna árut szállítunk el. Mekkora N legnagyobb értéke?

KöMaL / Arany D.

7. Oldjuk meg az

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}$$

egyenletet.

KöMaL

8. Határozzuk meg mindazokat az egész együtthatós $f(x)$ és $g(x)$ polinomokat, amikre

$$f(g(x)) = x^{2007} + 2x + 1.$$

KöMaL, Gyarmati Katalin