Elemi matematika gyakorlat, 2012. október 24.

1. Az $ABCD$ négyszögben $DAB\angle = 90°$, $ABC\angle = 100°$ és $BC = AD$. Az AB oldal felező merőlegese és a CD oldal felező merőlegese a P pontban metszik egymást. Mekkora az APB szög?

(KöMaL)

2. Egy háromszög beírt köréhez meghúzzuk az olalakkal párhuzamos érintőket, ezek egy-egy kis háromszöget vágnak le a háromszögből.

(a) Mekkora lehet a kis háromszögek kerületének összege?
(b) Mekkora lehet a kis háromszögek területének összege?
(c) Hogyan általánosíthatjuk a feladatot beírt kör helyett az egyik oldalhoz hozzáírt körre?
(d) Hogyan általánosíthatjuk a feladatot térben, háromszög helyett tetraéderrel?

3. Legfeljebb hány olyan gömb van, ami érinti egy adott tetraéder lapsíkjait?

4. Az ABC háromszögben legyen J a BC oldalhoz hozzáírt kör középpontja, ami az BC szakaszt az A_1, az AC és AB odalak meghosszabbítását pedig a B_1, illetve C_1 pontban érinti. Tegyük fel, hogy az A_1B_1 és AB egyenesek merőlegesen metszik egymást a D pontban. Legyen E a C_1 pont merőleges vetülete a DJ egyenesen. Határozzuk meg az BEA_1 és AEB_1 szögeket.

(Görög feladatjavaslat a 2006-os IMO-ra)

5. Az ABC szabályos háromszög körülírt körének AB ívén vegyük fel a P, a BC íven a Q és R, továbbá a CA íven az S és T pontokat úgy, hogy $AP = BQ = CR = CS = AT$ teljesüljön. A BQ és PR egyenesek metszéspontja legyen U, az AS és PT metszéspontja V; végül az AU és BV egyenesek metszéspontját jelöljük W-vel. Igazoljuk, hogy az AU, BV és PW egyenesek páronként 60°-os szöget zárnak be.

(KöMaL)

6. Adott az e egyenesen hat különböző pont: A, B, C, D, E és F. Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$. Szerkesszünk egyetlen egyenes vonalzóval olyan egyenest, amely párhuzamos e-vel.

(KöMaL)

7*. Az $ABCD$ konvex négyszög AB oldalán adott egy P pont. Legyen ω a CPD háromszög beírt köre, középpontja I. Tegyük fel, hogy ω érinti a APD és BPC háromszögek beírt köreit a K, illetve L pontban. respectively. Legyen az AC és BD egyenesek metszéspontja E, és legyen az AK és BL egyenesek metszéspontja F. Bizonyítsuk be, hogy E, I és F egy egyenesre esik.

(Lengyel feladatjavaslat a 2007-es IMO-ra, szerzője Waldemar Pompe)

(Segítség: keressünk további érintő köröket, vizsgáljuk a különböző körpárok hasonlósági pontjait.)

8*. Adott az e egyenesen négy különböző pont: A, B, C és D, és tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Létezik-e olyan, egyetlen egyenes vonalzót használó szerkesztési eljárás, amely egy e-vel párhuzamos egyenest szerkeszt meg?

(KöMaL)