Elemi matematika gyakorlat, 2012. november 7.

1. Igaz-e, hogy a térbeli derékszögű koordinátarendszer üres rácstetraédereinek mind ugyanakkora a térfogata? (Egy rácspoliédert üresnek nevezünk, ha a csúcsain kívül nem tartalmaz rácspontot sem a belsejében, sem a határán.)

2. Igaz-e, hogy a térbeli derékszögű koordinátarendszer üres rácsparallelepipedonjainak mind ugyanakkora a térfogata?

3. Adott egy tetraéder. Legfeljebb hány olyan gömb létezhet, ami a tetraéder mindegyik lapsíkját érinti?

4. Mely tetraéderekhez található olyan gömb, amely a tetraéder összes élét érinti?

5. Igaz-e, hogy ha egy tetraéder beírt és körülírt gömbjének középpontja egybeesik, akkor a tetraéder szabályos?

6. Adott két sík a térben, melyek α szöget zárnak be egymással. Az egyik síkban adott egy sokszög, amelyet merőlegesen levetítünk a másik síkra. Mekkora lehet az eredeti sokszög és a vetületként kapott sokszög területének aránya?

7. Egy tetraéderbe egységnyi sugarú gömb írható. A gömbnek a tetraéder lapjaival párhuzamos érintősíkjai a tetraédeből egy-egy kis tetraédert vágnak le. Mekkora az ezekbe a tetraéderekbe írható gömbök sugarainak összege? (KöMaL)

8. Négy pont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez a síkon. Tudjuk, hogy a pontok 6 lehetséges találkozásból öt bekövetkezik. Mutasd meg, hogy a hatodik is bekövetkezik.

9. Egy gömbháromszög oldalai a, b, c, szögei α, β, γ. Igazoljuk, hogy

$$c > a\cos\beta + b\cos\gamma.$$

(IMC, KöMaL)