Elemi matematika gyakorlat, 2012. november 28.

1. Egy ország bármely két városát vagy hajó-, vagy repülőút köti össze. Bizonyítsuk be, hogy vagy hajóval, vagy repülővel bejárható az egész ország.

2. Adott egy véges gráf. Szeretnénk a csúcsaira természetes számokat írni úgy, hogy két csúcsra írt számnak pontosan akkor legyen 1-nél nagyobb közös osztója, ha a két csúcs a gráfban össze van kötve. Meg lehet-e ezt mindig tenni? Mi a helyzet ha a követelmény fordított: két csúcson szereplő szám pontosan akkor legyen relatív prím, ha él köti össze őket?

3. Egy körmérkőzéses sakkversenyen kínai és amerikai sakkozók vettek részt, a kínaiak többen voltak, mint az amerikaiak. Mindenki mindenkivel egyetlen partit játszott. Mutassuk meg, hogy volt olyan hazafiatlan részvevő, aki legalább annyi pontot szerzett a honfitársai ellen, mint a másik ország fiai ellen.

4. Egy társaságban mindenki legfeljebb 12 másik embert utál (az utálat mindig kölcsönös). Mutassuk meg, hogy a résztvevőket el lehet helyezni két terembe úgy, hogy a kisebbik teremben mindenki legfeljebb 5, a nagyobbikban mindenki legfeljebb 8 másikat utáljon.

5. Mutasd meg, hogy egy ping-pong körmérkőzés résztvevői sorbaállíthatók úgy, hogy mindenki legyőzte a közvetlenül mögötte álló embert!

6. Egy társaságban bármely két embernek pontosan egy közös ismerőse van. Igaz-e, hogy vagy mindenkinek azonos számú ismerőse van, vagy van olyan ember, aki a társaság minden tagját ismeri?

7. Bergengóciában olyan az úthálózat, hogy a városok közötti utak nem ágaznak el, minden út két várost köz össze. Az úthálózat összefüggő, vagyis az utakon bármelyik városból bármelyik városba el lehetett jutni — legalábbis a múlt hétig. A világgazdasági válság és a gonosz IMF miatt ugyanis a bergengóc kormány változatos megszorításokra kényszerült. Az Utazásról Leszoktató Minisztérium például a következőket rendelte el:

> **56789/2012/ULM rendelet a helyváltoztatás szabadságának megőrzéséről és védelméről**
>
> *1.§ (a) Az ország mindegyik útját egyirányúsítani kell.*
>
> *(b) Az utak irányát olyan módon kell megválasztani, hogy ne lehessen körbe utazni több város között.*

Az intézkedés bevezetése ellen hevesen tiltakoztak a kukutyiniak, mert hozzájuk minden út befelé vezetett, és emiatt sehova nem tudtak utazni. A demonstráció vezérszónoka Mariska néni volt, aki az unokahúga nagybátya sógorának a régi kollégiumi szobatársát szerette volna meglátogatni Alsómocsoládon. A tiltakozások eredményeként a minisztérium a következővel egészítette ki a rendeletet:

> *2.§ (a) Minden héten, ha van olyan város, ahonnan csak kifelé vezet út, akkor ezek közül ki kell választani az egyiket, és az innen kifelé vezető utak irányítását meg kell fordítani.*
>
> *(b) Az (a) pont rendelkezéseiben előírtaktól eltekintve, a többi út irányítása nem változik.*

Eljuthat-e valaha Mariska néni Kukutyinból Alsómocsoládra?