Elemi matematika ZH, 2013. december 11.

Mindegyik lapra írd rá a nevedet, és legalább az egyikre azt is, hogy előadást tartottál, vagy KöMaL-t javítottál, vagy milyen mást számíthatok be. Elég annyi, hogy „előadás, Grundy” vagy „KöMaL jav”.

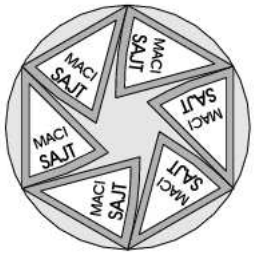
Törekedj az összeszedett, világos, jól olvasható leírásra. Csak arra adok pontot, amit el tudok olvasni.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. Az osztályzat az elért pontok száma, kerekítve.

Az íróeszközökön kívül más segédeszköz nem használható.

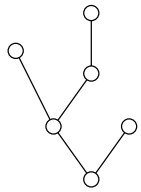
A gyakorlaton szerepelt állítások bizonyítás nélkül felhasználhatók, ha pontosan idézed.

1. Pisti a reggelinél, miután egy nyolcdarabos macisajtból kettő darabot megevett, a megmaradt darabokat az ábrán látható elrendezésben visszatette a dobozba. A tanító néni ennek nem örült, mert szerinte ,,összenyomorgatta” a sajtokat. Pisti szerint semmi ilyesmi nem történt, a sajtok éppen visszafértek a dobozba, és különben is, itt csupán fekete PR-ról meg a tanító néni karaktergyilkossági kísérletéről van szó. Melyiküknek lehet igaza?



2. Bizonyítsd be, hogy ha $n > 1$ egész, és $2^n + 1$ osztható n-nel, akkor n osztható 3-mal.

3. Mi a Favágó Játékban az alábbi állás Grundy-száma?



4. Az x^{2013} polinomot maradékosan elosztjuk az $(x+1)(x+2)(x+3)$ polinommal. Mi az osztási maradék?

5. Az ABC szabályos háromszög körülírt körének AB ívén vegyük fel a P, a BC íven a Q és R, továbbá a CA íven az S és T pontokat úgy, hogy $AP = BQ = CR = CS = AT$ teljesüljön. A BQ és PR egyenesek metszéspontja legyen U, az AS és PT metszéspontja V; végül az AU és BV egyenesek metszéspontját jelöljük W-vel. Igazold, hogy az AU, BV és PW egyenesek páronként $60°$-os szöget zárnak be.

6. Egy konvex poliéder egyik lapja L. Bizonyítsd be, hogy a következő állítások közül legalább az egyik teljesül:

(a) Az L csúcsai között van legfeljebb harmadfokú.

(b) Az L–re nem illeszkedő csúcsok között van legfeljebb ötödfokú.

7. Egy tetraéder beírt gömbjének sugara r. Három olyan gömb létezik, ami a tetraéder lapsíkjait érinti úgy, hogy egyik érintési pont sincs a tetraéder felületén; ezek sugara r_1, r_2, illetve r_3. Bizonyítsd be, hogy

$$r_1 + r_2 + r_3 > 9r.$$