Valós analízis gyakorlat, 2013. február 27.

1. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cdot \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy f folytonosan differenciálható, a 0-ban szigorú lokális minimumhelye van, de f' nem vált előjelet a 0-ban.

2. Legyen $D(f) = [0,1]$, $f(x) = x^7(1-x)^9$. Hol tűnik el f'? Mi a függvény minimuma és maximuma?

3. Határozzuk meg az $x^3 - 2x^2 + x - 2$ függvény lokális szélsőértékelyeit.

4. Mi az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n \cdot e^{-x}$ függvény értékkészlete?

5. Legyen a belső pontja $D(f) \subset \mathbb{R}$-nek. Melyik állításból következik melyik?
(a) f-nek a-ban lokális minimuma van.
(b) f-nek a-ban szigorú lokális minimuma van.
(c) $f'(a) = 0$. (d) $\overline{f'_-}(a) \leq 0$ és $\underline{f'_+}(a) \geq 0$. (e) $\overline{f'_+}(a) \leq 0$ és $\underline{f'_-}(a) \geq 0$.
(f) $\overline{f'_-}(a) < 0$ és $\underline{f'_+}(a) > 0$. (g) $\overline{f'_+}(a) < 0$ és $\underline{f'_-}(a) > 0$.

6. Igazoljuk, hogy tetszőleges $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez van olyan $\xi \in (a,b)$ szám, amire

$$\underline{f'}(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \overline{f'}(\xi).$$

Igaz marad-e ez az állítás, ha csak azt kötjük ki, hogy f féloldalról folytonos az a és a b pontban?

7. (a) Igazoljuk, hogy ha f kétszer differenciálható az $[0,2]$ intervallumban, és $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, akkor létezik olyan $\xi \in (0,2)$, amire $f''(\xi) = 0$.
(b) Igazoljuk, hogy ha f kétszer differenciálható az $[0,2]$ intervallumban, akkor létezik olyan $\xi \in (0,2)$, amire $f''(\xi) = f(0) - 2f(1) + f(2)$.

8. Általánosítsuk a Lagrange-középértéktételt három $(n+1)$ alappontra és második (n-edik) deriváltra.

Házi feladatok

9. Határozd meg a $\sin \sin x$ függvény abszolút és lokális szélsőértékhelyeit a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumban.

10. Az f függvény háromszor differenciálható, $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$ és $f'(0) = 1$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\xi \in (-1,1)$, amire $f'''(\xi) = 3$.

11. Általánosítsuk a Cauchy-középértéktételt három $(n+1)$ alappontra és második (n-edik) deriváltra.

A következő órán, írásban beadandó házi feladat

BA5. Egy $a \times b$ méretű papírból felül nyitott dobozt készítünk úgy, hogy a sarkaiból levágunk egy-egy $c \times c$-es négyzetet, és az oldalakat felhajtjuk. Hogyan válasszuk meg a c értékét, hogy a doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM4. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható, $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$ és $f(1) = 1$. Igazoljuk, hogy létezik olyan $\xi \in (0,1)$ valós szám, amire $f(\xi) \cdot f'(\xi) + f''(\xi) = 0$.