Valós analízis gyakorlat, 2013. március 22.

1. Minden $\varepsilon > 0$-hoz mutassunk olyan δ-t, hogy ha F az I intervallum egy δ-nál finomabb felosztása, és σ az f függvénynek egy F-hez tartozó integrálközelítő összege, akkor $|\sigma - \int_I f| < \varepsilon$.
(a) $I = [0, \pi/2]$, $f(x) = \sin x$;
(b) $I = [0, 1]$, $f(x) = x$, ha x racionális, és $f(x) = -x$, ha x irracionális.

2. Tegyük fel, hogy f korlátos $[0, 1]$-ben, és

$$\frac{f(1/n) + f(2/n) + \ldots + f(n/n)}{n} \to A.$$

Következik-e ebből, hogy f Riemann-integrálható, és $\int_0^1 f = A$?

3. Igazoljuk, hogy ha $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\frac{f(\frac{1}{n}) - f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) - f(\frac{4}{n}) + \ldots + (-1)^{n-1} f(\frac{n}{n})}{n} \to 0.$$

4. Konstruáljunk olyan (a) megszámlálható; (b) sehol sem sűrű $H \subset [0, 1]$ halmazt, aminek a karakterisztikus függvénye nem integrálható.

Házi feladatok

5. Igazoljuk, hogy ha egy $[0, 1] \to \mathbb{R}$ függvény (a) konvex; (b) Lipschitz, akkor integrálható.

6. Igazoljuk, hogy ha egy $[0, 1] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos, és minden szakadási helye a Cantor-halmazban van, akkor Riemann-integrálható.

7. Konstruáljunk olyan integrálható $[0, 1] \to \mathbb{R}$ integrálható függvényt, ami minden nem elfajuló intervallumban kontinum sok szakadási pontja van.

A következő órán, írásban beadandó házi feladat

BA11. Igazoljuk, hogy

$$\lim \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2} = 1.$$

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM8. Van-e olyan $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvény, amire igaz, hogy bármely $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ integrálható függvényhez az $\{x \in [0, 1] : f(x) = g(x)\}$ halmaz sűrű $[0, 1]$-ben?