Valós analízis gyakorlat, 2013. május 15.

1. (a) Legyen $a > 0$ és $f : [-a, a] \to [0, 1]$ olyan kétszer differenciálható függvény, ami csak a 0-ban veszi fel az 1-et, $f'(0) = 0$, és $f'(0) = -1$. Bizonyítsuk be, hogy $p \to \infty$ esetén

$$\int_{-a}^{a} f^p \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(b) A Wallis-formulánál tanultakból vagy parciális integrálással vezessük le (idézzük fel), hogy

$$\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x)^n\,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x)^{n+1}\,\mathrm{d}x\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ebből igazoljuk, hogy

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x)^n \sim \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(c) Az $f(x) = \cos x$ választásból számítsuk ki $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x$ értékét.

2. (a) Bizonyítsuk be, hogy $s > 0$ esetén

$$\Gamma(s) = \frac{(s-1)^s}{e^{s-1}} \int_0^{\infty} \left(ye^{1-y}\right)^{s-1}\,\mathrm{d}y.$$

(b) Vezessük le a Gamma-függvényre vonatkozó Stirling-formulát ebből a képletből.

Házi feladatok

3. (a) Fejezd ki az $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ integrált a Γ-függvénnyel.
(b) $\Gamma(\frac{1}{2}) = ?$

4. Legyen

$$f(s) = \frac{4^s \cdot \Gamma(s) \cdot \Gamma(s + \frac{1}{2})}{\Gamma(2s)}.$$

(a) Bizonyítsd be, hogy f periodikus.
(b) Bizonyítsd be, hogy f-nek van határértéke ∞-ben, és számítsuk ki. (Használd a Stirling-formulát.)
(c) Mondd ki az eredményt: $\Gamma(s) \cdot \Gamma(s + \frac{1}{2}) = \ldots\ldots\ldots \cdot \Gamma(2s)$ ha $s > 0$.
(d) Általánosítsd az eredményt $\frac{1}{2}$ helyett $\frac{1}{n}$-nel.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

PM14. Bizonyítsd be, hogy $u, v > 0$ esetén

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u + v)}.$$