Elemi matematika gyakorlat, 2015. október 6.

1. Legyen a és $m \geq 2$ relatív prím.
(a) Mi lehet az olyan nemnegatív n egészek halmaza, amikre $a^n \equiv +1 \mod m$?
(b) Mi lehet az olyan nemnegatív n egészek halmaza, amikre $a^n \equiv -1 \mod m$?

2. Határozzuk meg az összes olyan $n \geq 1$ természetes számot, melyre $2^n - 1$ valamely természetes szám második, vagy annál nagyobb egész kitevős hatványával egyenlő.

Arany D., 1983

3. Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ egész és $6^n - 1$ osztható n-nel, akkor n osztható 5-tel.

KöMaL

4. Igazoljuk, hogy 10-es számrendszerben az $\underbrace{111\ldots1}_{5^n}$ szám minden pozitív osztója 1-re végződik.

KöMaL B.4051.

5. Legyen p prímszám, és jelöljük $v_p(n)$-nel a p kitevőjét az n prímtényezős felbontásában. Igazoljuk, hogy ha $a \neq b$ olyan egészek, amikre $a \equiv b \not\equiv 0 \mod p$, akkor $v_p(a^p - b^p) = v_p(a - b) + 1$.

(„Lifting The Exponent lemma", LTE)

6. Oldjuk meg az egész számhármasok halmazán az

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 9xyz$$

egyenletet.

Kürschák, 1983

Házi feladatok

7. Mik azok az n pozitív egészek, amikre $n^2 | 2^n + 1$?

IMO 1990/3

8. Mely a, b, c pozitív egész számok esetén igaz az, hogy $2^a - 1$ osztható b-vel, $2^b - 1$ osztható c-vel, és $2^c - 1$ osztható a-val?

KöMaL B.4191.

9. Tetszőleges, pozitív egész számokból álló, nem üres H halmazra jelöljük lnko(H)-val a H elemeinek legnagyobb közös osztóját. Mutassuk meg, hogy ha A pozitív egész számokból álló, véges, nem üres halmaz, akkor

$$\sum_{\emptyset \neq H \subseteq A} (-2)^{|H|-1} \mathrm{lnko}(H) > 0.$$

KöMaL A. 492. (Pach Péter Pál)