Alk.mat. KFT, 1. gyakorlat, 2015. szeptember 7.

A gyakorlatok feladatsorait innen is le lehet tölteni:
http://www.cs.elte.hu/~kosgeza/oktatas/2015osz-kft-alkmat/

További gyakorló feladatok itt: Fehér–Kós–Tóth: Analízis feladatgyűjtemény II.
http://etananyag.ttk.elte.hu/request.php?101

Várható ZH időpontok: október 19. és december 7.

Osztályozás: gyakorlati jegy $\approx \frac{2\cdot Z_1 + 2\cdot Z_2 + \overline{R} + P}{5} \pm M$, ahol $Z_1, Z_2 \in [0,7]$ a két ZH pontszám, $\overline{R} \in [0,6]$ a 5–10 röpdolgozat átlaga a két legrosszabb nélkül, P a megszerzett Pedál Medál pirospontok száma, M az órai munka (a.k.a. pofafaktor). Javítási lehetőség: a pót ZH-n (várható időpont: december 14.).

A gyakorlatokon való részvétel kötelező. Ha valaki a gyakorlatok negyedénél többről hiányzik, akkor csak rendkívüli, igazolt esetben, többletfeladatok teljesítése után kaphat gyakorlati jegyet. Ha valaki a gyakorlatoknak több mint a harmadánál többről hiányzik, akkor nem kaphat gyakorlati jegyet.

1. $(1+\sqrt{3}i)^{30} = ?$ $\quad \sqrt[3]{i} = ?$ $\quad \sqrt[4]{i} = ?$

2. Legyen $a, b, c \in \mathbb{C}$. Milyen geometriai jelentése van az $\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left((c-a)\cdot\overline{(b-a)}\right)$ számnak?

3. Írjuk fel azokat az $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre $u(x,y) + v(x,y)\cdot i = (x+yi)^3$.
$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = ?$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = ?$

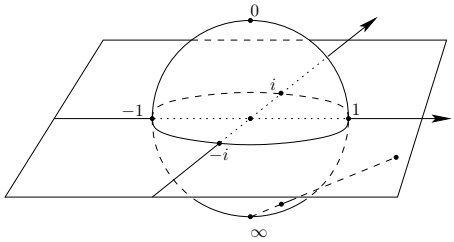
4. Ábrázoljuk azoknak a z komplex számoknak a halmazát, amikre (a) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1$; (b) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2$; (c) $\arg(z+1) = \arg(2z-1)$ $(-\pi < \arg z \le \pi)$; (d) $\operatorname{Re}(z^2) = 4$.

5. Mi az m-edik egységgyökök összege, szorzata, négyzetösszege?

6. Feleltessük meg az egységnyi sugarú gömb pontjait a $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ halmaznak sztereografikus projekcióval (inverzióval) az ábra szerint.

(a) A gömb milyen transzformációit írják le a következő függvények?

$$z \mapsto -z; \quad z \mapsto \overline{z}; \quad z \mapsto iz; \quad z \mapsto \frac{1}{z}; \quad z \mapsto \frac{-1}{\overline{z}}; \quad z \mapsto \frac{z-i}{1-iz}$$



(b) Mely függvények a gömb forgatásai?

Házi feladatok

7. Ábrázold azoknak a z komplex számoknak a halmazát, amikre
(a) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 2\pi$; (b) $|\arg(z)| < \frac{\pi}{4}$; (c) $\frac{|z|}{\operatorname{Re} z} < K$; (d) $|z-1|+|z+1| < 4$; (e) $\operatorname{Re}\frac{1+z}{1-z} > 0$.

8. Milyen ponthalmazokat határoznak meg az alábbi egyenlőtlenségek?
a) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 2\pi$ b) $|\arg(z)| < \frac{\pi}{4}$ $(-\pi < \arg z \le \pi)$ c) $\frac{|z|}{\operatorname{Re} z} < K$ d) $|z-1|+|z+1| < 4$

9. Legyen $\varepsilon := \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. legyen továbbá $a, b \in \mathbb{C}$. Legyen $u := a+b$, $v := \varepsilon a + \varepsilon^2 b$, $w := \varepsilon^2 a + \varepsilon b$. Számítsd ki u, v, w elemi szimmetrikus polinomjait.

10. Hova képezi a $w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ függvény (Zsukovszkij-leképezés)
(a) Az egységkörvonalat? (b) az egységkörvonal belsejét? (c) a külsejét?
(d) a 0 középpontú köröket? (e) a 0-n átmenő egyeneseket?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM1. A mértani sorozat összegképletének segítségével írd fel „zárt alakban” az $1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$ és az $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$ összeget.

PM2. A tér pontjait tekintsük olyan kvaterniónoknak, amelyek skalár része 0. Legyen $a \neq 0$ egy tetszőleges kvaternió. A tér milyen geometriai transzformációját írja le az $x \mapsto a^{-1}xa$ hozzárendelés?