Alk.mat. KFT, 2. gyakorlat, 2015. szeptember 14.

1. Van-e olyan a 0-ban komplex differenciálható függvény, amely az $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ helyeken rendre az alábbi értékeket veszi fel?

(a) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$;
(b) $0, 1/2, 0, 1/4, 0, 1/6, \ldots$
(c) $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \ldots$

2. Hol teljesülnek a Cauchy-Riemann egyenletek?

(a) $z \mapsto z^2 \operatorname{Re} z$.
(b) $z \mapsto z^a \overline{z}^b$, ahol $a, b = 0, 1, 2, \ldots$
(c) $z \mapsto \operatorname{Im}^2 z + \operatorname{Re} z + \overline{z}$

3. Keressünk olyan $v(x, y) : R^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényt (ha van), melyre az $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mindenütt differenciálható.

(a) $u(x, y) = e^x \cos y$
(b) $u(x, y) = 3x + 2y$.

4. Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a Cauchy-Riemann egyenletek a következő függvényekre:

$$(x^2 + y^2, 2xy); \qquad (x^2 - y^2, 2xy); \qquad (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

5. Mik azok a komplex számok, ahol az $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re}^2 z \cdot i + \overline{z}$ függvény differenciálható?

6. Igaz vagy hamis?

(a) Ha az $f(z)$ függvény differenciálható a z_0 pontban, akkor $\overline{f(z)}$ differenciálható a z_0 pontban.
(b) Ha $f(z)$ differenciálható z_0-ban, akkor $f(\overline{z})$ differenciálható $\overline{z_0}$-ban.
(c) Ha $f(z)$ függvény differenciálható z_0-ban, akkor $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ differenciálható $\overline{z_0}$-ban.

Házi feladatok

7. Hol teljesülnek a Cauchy-Riemann egyenletek?

(a) $f(x + iy) = x$
(b) $f(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - \sin x \operatorname{sh} y$

8. Keressünk olyan $v(x, y) : R^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényt (ha van), melyre az $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mindenütt differenciálható.

(a) $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$
(b) $u(x, y) = x^2 + y^2$.

9. Mik azok a komplex számok, ahol az $\operatorname{Im}^2 z + \operatorname{Re} z + \overline{z}$ függvény differenciálható?

10. Igazoljuk a Zsukovszkij-függvény és a komplex differenciálhatóság segítségével, hogy a $-1, 1$ fókuszú ellipszisek és hiperbolák merőlegesen metszik egymást.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM3. Legyen f folytonosan differenciálható a D nyílt egységkörlemezen, értékkészlete $f(D)$. Tegyük fel, hogy f egyrétű (injektív).

(a) Írjunk fel olyan terület szerinti integrált az egységkörlemezen, ami megadja $f(D)$ területét.

(b) Hasonlítsuk össze ezt a képletet a valós analízis tárgyból ismert, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényekre vonatkozó hasonló eredménnyel.