Alk.mat. KFT, 3. gyakorlat, 2015. szeptember 21.

1. Milyen azonosságokat kaphatunk az $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ azonosság négyzetre emelésével, illetve deriválásával?

2. Hol konvergálnak és mely reguláris függvényhez az alábbi hatványsorok?

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty}(2z+1)^n \qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1)^n \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z)^n}{n}$$

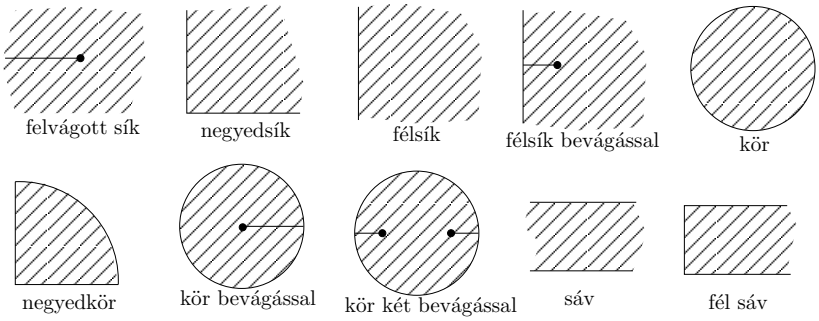
3. Fejtsük hatványsorba a 0 körül az $f(z) = \frac{1}{z+1}$, az $f(z) = \frac{1}{z^2+3z+2}$ és az $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$ függvényeket.

4. Van-e határértéke az e^{-1/z^4} függvénynek a 0-ban?

5. (a) Van-e valós értéke $(-1)^i$-nek?
(b) Számítsuk ki $\log(1+i)$ összes értékét.

6. Ábrázoljuk a síkon az $\left\{e^z : \ 0 < \operatorname{Re} z < 1, \ 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\}$ halmazt.

7. Az ábrán tízféle tartomány látható. Keressünk közöttük konform megfeleltetéseket (oda-vissza differenciálható bijekciókat).



Házi feladatok

8. Fejtsd hatványsorba a -2 körül az $\frac{1}{z-1}$ és az $\frac{1}{z^2}$ függvényeket.

9. Ábrázold a $\left\{\log \frac{1-z}{1+z} : \ \operatorname{Re} z > 0\right\}$ halmazt.

10. Számítsd ki $(1-i)^i$ összes értékét.

11. Tekintsük a logaritmusfüggvénynek azt a $\mathbb{C}\backslash\{x+iy : x \geq 0, y = \sin x\}$ tartományon reguláris ágát, amelyre $\log 1 = 0$. Erre a log függvényre $\log(e^{3/2}) =$?

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM4. Tegyük fel, hogy az $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergens az $|z| < r + \varepsilon$ körön. Igazold, hogy

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

(Parseval-formula hatványsorokra)