## Alk.mat. KFT, 5. gyakorlat, 2015. október 5.

**1.** Hogy viselkednek az $e^{iz}$, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ függvények, ha $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$?

**2.** Van-e primitív függvényük?

$$\text{(a) } f(z)=\frac{1}{z} \quad (D(f)=\mathbb{C}\setminus\{0\}) \qquad \text{(b) } f(z)=\frac{1}{z} \quad (D(f)=\operatorname{Re} z>0) \qquad \text{(c) } \frac{\sin z}{z^n}$$

**3.** Legyen $a$ komplex szám. Alakítsuk át egy holomorf függvény komplex vonalintegráljává az $\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1}\left|z-a\right|^2|\,\mathrm{d}z|$ integrált, majd számítsuk ki.

**4.** A $p(z)$ legalább másodfokú polinom gyökei az $|z|<\varrho$ kör belsejébe esnek. Legyen tetszőleges $R>|\varrho|$ esetén

$$I(R)=\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{p(z)}.$$

Igazoljuk, hogy (a) $\left|I(R)\right|\le O(1/R)$; (b) $I(R)$ értéke állandó; (c) $I(R)=0$.

**5.** Tudjuk, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cdot\,\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}$. Ennek felhasználásával igazoljuk, hogy tetszőleges $a$ komplex számra

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cdot e^{iax}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}\cdot e^{-a^2/2},$$

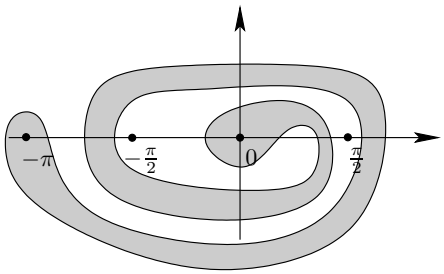
avagy haranggörbe Fourier-transzformáltja is haranggörbe.

### Házi feladatok

**6.** Hagyjuk el a síkból a $\pi$ (valós egész) többszöröseinek egységnyi sugarú környezetét. Igazold, hogy a megmaradt tartományon az $1/\sin z$ és a $\operatorname{ctg} z$ függvény is korlátos.

**7.** $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{|z|=1}|z-a|^4\,|\mathrm{d}z|=?$

**8.** Az $f(z)$ függvény holomorf a $0<|z|<1$ halmazon, és $|f(z)|<\frac{1}{\sqrt{|z|}}$. Mutassuk meg, hogy $f$-nek van primitív függvénye.

### Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

**PM5.** Az ábrán látható tartományon a $f(z)=\sqrt[3]{\cos z}$ függvény értelmezhető úgy, hogy $f$ folytonos, és $f(0)=1$. (Ezt nemsokára bebizonyítjuk, de például a PM2a. feladatból is következik.) Mennyi $f(-\pi)$?