Alk.mat. KFT, 6. gyakorlat, 2015. október 12.

1.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\cos z\,\mathrm{d}z=? \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3}\frac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{d}z=? \qquad \int_{|z|=3}\frac{e^z}{z^2-4}\,\mathrm{d}z=?$$

$$\int_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-2)^3}\,\mathrm{d}z=? \qquad \int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z-9z^3}=? \qquad \int_{|z|=3}\frac{\sin z}{z^2-\frac{\pi^2}{4}}\,\mathrm{d}z=?$$

2. Legyen f és g reguláris a zárt egységkörlapon. Mi lesz

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{g(\zeta)}{1-z\zeta}\mathrm{d}\zeta$$

$|z|\neq 1$ esetén?

3. Legyen $f(z)=\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$. Ellenőrizzük az együtthatóformulát az $|z|=\frac{1}{2}$ körön: cseréljük ki a kört egy $R>1$ sugarú körre (közben alkalmazzuk a Cauchy-formulát az 1 pontban) és nézzük meg, hogy mi történik, ha $R\to\infty$.

4. Az $f(z)$ függvény holomorf a $0<|z|<1$ halmazon, és $|f(z)|<\frac{1}{\sqrt{|z|}}$. Mutassuk meg, hogy f-nek van primitív függvénye.

Házi feladatok

5. Legyen a és r is pozitív valós szám.

$$\int\limits_{|z|=r}a^z\,\mathrm{d}z=? \qquad \int\limits_{|z|=r}\frac{a^z}{z+1}\,\mathrm{d}z=? \qquad \int\limits_{|z|=r}\frac{a^z}{(z+2)^2}\,\mathrm{d}z=? \qquad \int_{|z|=2}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n\mathrm{d}z=? \quad (n\in\mathbb{Z})$$

6. Számítsuk ki az alábbi vonalintegrálokat:

$$\int_{|z|=5}\frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z \qquad \int_{|z|=3}\frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z \qquad \int_{|z|=3}\frac{e^z}{z^2-3z+2}\,\mathrm{d}z$$

$$\int_{|z|=3}\frac{1}{\sin z}\,\mathrm{d}z \qquad \int_{|z|=5}\frac{1}{\sin z}\,\mathrm{d}z \qquad \int_{|z|=3}\frac{1}{\sin z\cos z}\,\mathrm{d}z \int_{|z|=3}\frac{1}{e^z-1}\,\mathrm{d}z$$

7. Az f függvény holomorf egy 0 középpontú, $r+\varepsilon$ sugarú körben. Igazoljuk, hogy a 0 körüli, r sugarú körön $f(z)$ átlaga $f(0)$. (Gondoljuk meg hatványsorral és közvetlenül a Cauchy-formulával is.)

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM6. *„Az $a_0,a_1,\ldots,$ sorozatban $a_0=-1$, és tetszőleges $n\geq 1$-re $\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+1}=0$. Igazoljuk, hogy $n\geq 1$ esetén $a_n>0$.”* (IMO Shortlist, 2006/A2)

Oldjuk meg a feladatot komplex függvénytani eszközökkel. Számítsuk ki az $f(z)=\sum_{n=0}^{n}a_nz^n$ generátorfüggvényt, írjuk fel rá az együtthatóformulát, és mutassuk meg, hogy

$$a_n=\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n(\pi^2+\log^2(x-1))}.$$