Alk.mat. KFT, ZH, 2015. október 19.

A-csoport

Mindegyik lapra írd rá a nevedet.

Törekedj a világos, jól olvasható leírásra. (Csak arra adok pontot, amit nagyító nélkül is el tudok olvasni.)

A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek. A feladatok tetszőleges sorrendben kidolgozhatóak.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

Végeredmény közlése önmagában nem elegendő, megfelelő indoklás szükséges.

Semmilyen segédeszköz sem használható, számológép sem.

A1. Milyen pontokban differenciálható az $|z|^2 - (2+i)\bar{z}$ függvény?

A2. Legyen $a, b > 0$. Bizonyítsd be a komplex differenciálhatóság segítségével, hogy az $x^3 - 3xy^2 = a$ és $3x^2y - y^3 = b$ görbék merőlegesen metszik egymást.

A3. Fejtsd hatványsorba a $\dfrac{z^3+i}{z^2+z}$ függvényt az i körül.

A4. Mutass példát (képletet) konform megfeleltetésre a $D_1 = \{z : \ |\operatorname{Im} z| < 1\}$ és a $D_2 = \{z : \ |z| < 1, \ \operatorname{Re} z > 0 \text{ és } \operatorname{Im} z > 0\}$ tartományok között.

A5.

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+2z-3)^4} = ?$$

A6. Az $f(z)$ függvény holomorf az egységkör belsejében, és $|f| < 1$. Legfeljebb mekkora lehet $|f'''(0)|$?

A7.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ?$$

Alk.mat. KFT, ZH, 2015. október 19.

B-csoport

Mindegyik lapra írd rá a nevedet.

Törekedj a világos, jól olvasható leírásra. (Csak arra adok pontot, amit nagyító nélkül is el tudok olvasni.)

A feladatok nem feltétlenül nehézségi sorrendben következnek. A feladatok tetszőleges sorrendben kidolgozhatóak.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

Végeredmény közlése önmagában nem elegendő, megfelelő indoklás szükséges.

Semmilyen segédeszköz sem használható, számológép sem.

B1. Milyen pontokban differenciálható az $|z|^2 + (2+i)\bar{z}$ függvény?

B2. Legyen $a, b > 0$. Bizonyítsd be a komplex differenciálhatóság segítségével, hogy az $\dfrac{x}{x^2+y^2} = a$ és $\dfrac{y}{x^2+y^2} = b$ görbék merőlegesen metszik egymást.

B3. Fejtsd hatványsorba a $\dfrac{z^3+i}{z^2-z}$ függvényt a $-i$ körül.

B4. Legyen $D_1 = \{z : \ 0 < \operatorname{Re} z < 1, \ 0 < \operatorname{Im} z\}$ és $D_2 = \{z : \ \operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Im} z > 0\}$. Mutass példát (képletet) $D_1 \to D_2$ konform leképezésre.

B5.

$$\int_{|z|=3} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-3z-4)^3} = ?$$

B6. Az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergens az egységkör belsejében, és $|f| < 1$. Legfeljebb mekkora lehet $|a_4|$?

B7.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ?$$