Alk.mat. KFT, 7. gyakorlat, 2015. november 2.

1. Van-e olyan $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ reguláris, melyre elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}$; (b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$; (c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n}$; (d) $\operatorname{Re} f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n}$?

2. Az $f(z)$, $\overline{f(\bar{z})}$ és $\overline{f(-\bar{z})}$ függvények összehasonlításával igazoljuk, hogy ha az f egészfüggvény a valós és a képzetes tengelyen is csak valós értékeket vesz fel, akkor páros függvény.

3. (a) Az $f(z)$ egészfüggvényre $|f(1/n)| = 1/n^2$, ha $n = 1, 2, \ldots$, és $|f(i)| = 2$. Mekkora lehet $|f(-i)|$?
(b) Az f egészfüggvényre $\arg f(1/n) \equiv \frac{\pi}{n^2} \pmod{2\pi}$, ha $n = 1, 2, \ldots$. Mi lehet $\arg f(2)$?

4. A maximum-elv felhasználásával bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény reguláris és nem konstans egy nyílt halmazon, akkor a valós és a képzetes részének nincs lokális szélsőértéke.

5. Legyen $f(z)$ olyan egészfüggvény, amire $|f(z)| \le e^{|z|}$, és legyen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a függvény 0 körüli hatványsora. Igazoljuk, hogy $|a_n| \le \left(\frac{e}{n}\right)^n$. (Mekkora körre érdemes felírni az együtthatóbecslést?)

6. Fejtsük Laurent-sorba a $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+1)}$ függvényt az 1 körül, az $1 < |z-1| < 2$ tartományon. Számítsuk ki az együtthatókat az együtthatóformulából is.

Házi feladatok

7. Van-e olyan $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ reguláris, melyre elég nagy $n \in \mathbb{N}$ esetén

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{n+2}$; (b) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n^n}$?

8. Az f egészfüggvényre tetszőleges n pozitív egész esetén $\operatorname{Re} f(1/n) = 1/n^2$. Mi lehet $\operatorname{Re} f(-1)$?

9. A Liouville-tétel segítségével igazold, hogy ha f kétszeresen periodikus egész függvény (azaz $f(z+a) = f(z)$, $f(z+b) = f(z)$, és az a, b periódusok nem egy közös c periódus egész számú többszörösei), akkor f konstans.

10. A Liouville-tételből vezessük le, hogy ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor (a) a valós része nem lehet korlátos sem alulról, sem felülről; (b) az értékkészlete sűrű, azaz minden kör belsejében felvesz értéket.

11. Fejtsd Laurent-sorba a $\frac{z^3+2}{z(z+1)}$ függvényt az 1 körül, az $1 < |z-1| < 2$ halmazon.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM7. A Liouville-tételből vezesd le, hogy ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor minden egyenes szakaszon van értéke. (Használd a Zsukovszkij-függvényt.)

PM8. Legyen $S(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$. Igazoljuk, hogy

(a) ez a végtelen szorzat a teljes komplex számsíkon konvergens, és a szorzatfüggvény reguláris;
(b) $S(z+\pi) = -S(z)$;
(c) ha a komplex számsíkból a π minden többszörösének elhagyjuk egy egységnyi sugarú környezetét, akkor a megmaradt tartományon az $1/S(z)$ függvény korlátos;
(d) az $\frac{1}{S(z)} - \frac{1}{\sin z}$ függvény korlátos, és csak megszüntethető szingularitásai vannak;
(e) $S(z) = \sin z$.