Alk.mat. KFT, 8. gyakorlat, 2015. november 9.

1. A Liouville-tétel segítségével igazoljuk, hogy ha f kétszeresen periodikus egész függvény (azaz $f(z+a) = f(z)$, $f(z+b) = f(z)$, és az a, b periódusok nem egy közös c periódus egész számú többszörösei), akkor f konstans.

2. A maximum-elv, illetve a nyílt leképezés tétele felhasználásával bizonyítsuk be, hogy ha egy függvény reguláris és nem konstans egy nyílt halmazon, akkor a valós és a képzetes részének nincs lokális szélsőértéke.

3. Fejtsük Laurent-sorba a $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z+1)}$ függvényt az 1 körül, az $1 < |z-1| < 2$ tartományon.

4. Igazoljuk, hogy ha f-nek a-ban izolált szingularitása van, és vannak olyan $z_n \to a$ és $w_n \to a$ sorozatok, hogy $f(z_n) \to 1$, $f(w_n) \to 2$, akkor van olyan $s_n \to a$ sorozat is, hogy $f(s_n) \to 3$.

5. Tegyük fel, hogy f-nek m-edrendű pólusa van a-ban, és p egy n-edfokú polinom. Mutassuk meg, hogy $p(f(z))$ függvénynek mn-edrendű pólusa van a-ban.

6. Adjuk meg az alábbi függvények összes izolált szingularitását, és nevezzük meg a szingularitások típusait.

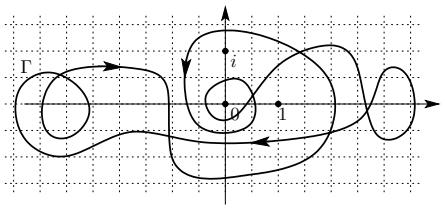
$$\frac{1}{z^2-3z+2} \qquad \frac{z}{\sin z} \qquad e^{1/z}$$

7. Számítsuk ki az alábbi reziduumokat:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z} \qquad \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{e^z-1} \qquad \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{x^2+2}{e^z-1-z} \qquad \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\cos x}{\sin z - z}$$

8.

$$\int_\Gamma \frac{\operatorname{tg} z}{z^2+1} = ?$$



Házi feladatok

9. A Liouville-tételből vezesd le, hogy ha egy egészfüggvény nem konstans, akkor (a) a valós része nem lehet korlátos sem alulról, sem felülről; (b) az értékkészlete sűrű, azaz minden kör belsejében felvesz értéket.

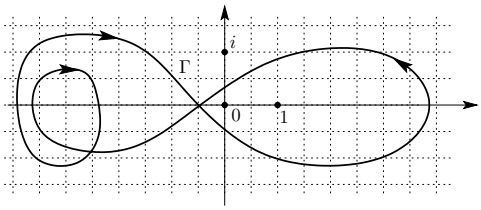
10. Fejtsd Laurent-sorba a $\dfrac{z^3+2}{z(z+1)}$ függvényt az 1 körül, az $1 < |z-1| < 2$ halmazon.

11. Igazoljuk, hogy ha az $f(z)$ függvény reguláris az a pont egy pontozott környezetében, és ott $f|(z)| > 1$, akkor a megszüntethető szingularitás vagy pólus.

12. Lehet-e az f függvény izolált szingularitása e^f-nek pólusa?

13.

$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{\cos z} = ? \qquad \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^2 \sin z} = ?$$



Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladatok

PM9. A reziduumtételből vezesd le, hogy ha $p(z)$ legalább másodfokú polinom, és a gyökei, $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ különbözők, akkor $\sum \dfrac{1}{p'(\varrho_k)} = 0$.

PM10. Legyen n pozitív egész szám, és φ egészfüggvény. Tetszőleges $X > 0$ valós szám esetén legyen

$$f(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=n+1} \frac{\varphi(s) \cdot X^s}{s(s-1)(s-2)\cdot \ldots \cdot (s-n)}\, \mathrm{d}s.$$

(a) Igazold, hogy $f(X)$ polinom. (b) Milyen integrálok állítják elő f deriváltjait?

(c) Mutasd meg, hogy ha φ polinom, és $\deg \varphi = k < n$, akkor $f(1) = f'(1) = f''(1) = \ldots = f^{(n-k-1)}(1) = 0$ és $f^{(n-k)}(1) \neq 0$, vagyis az f-nek az 1 pontosan $(n-k)$-szoros gyöke.