## Alk.mat. KFT, 10. gyakorlat, 2015. november 23.

**1.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =?$ $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =?$ $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x =?$ $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{(\log x)^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x =?$

**2.** Számítsuk ki a $\dfrac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{x^2-\frac{1}{4}}$ függvény reziduumaiból a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-\frac{1}{4}}$ összeget. Utána számítsuk ki teleszkópos összeggé alakítva is, hogy összehasonlítsuk az eredményt.

**3.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =?$$

**4.** Legyen $|a| = 3$. Hány gyöke lehet (multiplicitással számolva) a $z^4 + z^3 + az - 1$ polinomnak az $1 < |z| < 2$ tartományon?

**5.** Hány gyöke van a $2^z + 3z^2 - z$ függvénynek az egységkörben?

**6.** Bizonyítsuk be az algebra alaptételét az erősebb változatban
(a) paraméteres tétel segítségével;
(b) Rouché tétele segítségével.
(c) A logaritmikus deriváltas képlettel

**7.** Legyen $f : D \to \mathbb{C}$ reguláris. Legyen $\gamma : [a, b] \to D$ rektifikálható egyszerű zárt görbe, melyre $int(\gamma) \subset D$. Tegyük fel, hogy $|f(\gamma(t))| > 1$ minden $t \in [a, b]$ esetén. Igazoljuk, hogy $f$ $int(\gamma)$-ban $B(0, 1)$ minden elemét (multiplicitással számolva) ugyanannyiszor veszi fel.

### Házi feladatok

**8.** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha+1} =?$ $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} =?$ $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\log x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} =?$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x =?$

**9.** Számítsuk ki az alábbi sorok összegét:

$$(a) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+4} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

**10.** Hány gyöke van a $\sin z = 2z^2$ egyenletnek az egységkörben?

**11.** Tegyük fel, hogy $f$ meromorf az $1 \le |z| \le 2$ halmazon, és $|f(z)| \le 1$, ha $|z| = 1$ vagy 2. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f(z)$ a 2 értéket éppen annyiszor veszi fel, mint ahány pólusa van ebben a körgyűrűben.

### Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

**PM12.** Bizonyítsd be, hogy a polinomok gyökei folytonosan függnek az együtthatóktól, azaz ha az $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ polinom (ahol $a_n \neq 0$) gyökei $u_1, \ldots, u_n$, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta$, hogy ha $b_0, \ldots, b_n$ komplex számok és $|b_j - a_j| < \delta$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, és a $b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0$ polinom gyökei $w_1, \ldots, w_n$, akkor az $1, \ldots, n$ indexek egy alkalmas $\sigma$ permutációjára $|w_j - u_{\sigma(j)}| < \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, n)$.