## Alk.mat. KFT, 11. gyakorlat, 2015. november 30.

**1.** Számítsuk ki a $\dfrac{\pi \operatorname{ctg}(\pi z)}{x^2 - \frac{1}{4}}$ függvény reziduumaiból a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}}$ összeget. Utána számítsuk ki teleszkópos összeggé alakítva is, hogy összehasonlítsuk az eredményt.

**2.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$$

**3.** Legyen $|a| = 3$. Hány gyöke lehet (multiplicitással számolva) a $z^4 + z^3 + az - 1$ polinomnak az $1 < |z| < 2$ tartományon?

**4.** Hány gyöke van a $2^z + 3z^2 - z$ függvénynek az egységkörben?

**5.** Írjunk fel (lehetőleg számolás nélkül) olyan törtlineáris függvényt, ami (a) az egységkört a jobb félsíkba képezi; (b) a felső félsíkot az egységkörbe képezi; (c) az egységkör jobb oldalát az első síknegyedbe képezi.

**6.** Legyen $D = \{z : |z + \frac{1}{2}| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$. Legyen $\varphi$ az a konform leképezés, ami $D$-t a jobb félsíkra képezi úgy, hogy $\varphi(0) = \infty$ és $\varphi(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i) = \mp i$. Igazoljuk, hogy $\varphi$ kiterjeszthető az egész síkon meromorf függvénnyé. Mik a kiterjeszetett függvény gyökei és pólusai?

### Házi feladatok

**7.** Számítsuk ki az alábbi sorok összegét:

$$(a) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4} \qquad (b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

**8.** Hány gyöke van a $\sin z = 2z^2$ egyenletnek az egységkörben?

**9.** A kitevőben levő függvény 0-, $\infty$- és 1-beli értéke alapján, további számolás nélkül, pusztán a törtlineáris függvények és az exponenciális függvény ismert tulajdonságai alapján mutasd meg, hogy $\left|e^{(z+1)/(z-1)}\right| < 1 \quad (|z| < 1)$.

**10.** Hány gyöke van (multiplicitással számolva) az

$$\frac{z - \frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{8}z} = \frac{8}{9}z^4$$

egyenletnek az $1 < |z| < 3$ tartományon?

### Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál pirospontra beváltható) feladat

**PM13.** Igazoljuk, hogy létezik olyan, az egységkörben reguláris, nem konstans függvény, aminek gyökei a körvonal minden pontjához torlódnak. (Használjuk lineáris törtek szorzatát és a Vitali-Montel tételt.)

**PM14.** Egy konform leképezés a felső félsíkra képez egy szabályos háromszöglemezt úgy, hogy a három csúcs képe 0, 1, illetve $\infty$. Mi lehet a háromszög középpontjának képe?