Alk.mat. KFT, javító ZH, 2015. december 18.

Mindegyik lapra írd rá a nevedet.

Minden feladat legfeljebb 1 pontot ér. Részpontszám is kapható. A dolgozatra kapott osztályzat körülbelül az összpontszámmal egyezik meg.

Várható értékelés: $Gy \approx \frac{M+J}{2}$, ahol Gy a gyakorlati jegy, M a megajánlott jegy, J a javító dolgozat pontszáma.

1. Milyen pontokban differenciálható az $|z|^2 + (2+i)\operatorname{Im} z$ függvény?

2. Add meg az

$$f(z) = \frac{z^3}{z^2 + 4z + 3}$$

függvény összes 1 körüli Laurent sorát, és a sorokhoz tartozó konvergencia tartományokat.

3.

$$(a) \quad \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{\sin z - z} = ? \qquad (b) \quad \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{e^z - 1 - z} = ?$$

4.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x + x^2)^2} = ?$$

5. Hány gyöke van a $z^6 - 10z + 8$ polinomnak az $|z| > 1$ tartományban?

6. Igazold, hogy ha $f(z)$ egészfüggvény, és $|z| = 1$ esetén $\operatorname{Re} f(z) = 0$, akkor f konstans.

7. Legyen φ olyan törtlineáris függvény, ami az $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ félkört megfelelteti az $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ negyedsíknak, és $\varphi(\frac{1}{2}) = 1$.

(a) Határozd meg $\varphi(-1)$, $\varphi(1)$ és $\varphi(2)$ értékét a törtlineáris függvények tanult tulajdonságaiból.

(b) Írd fel $\varphi(z)$-t képlettel.