18. Valós analízis gyakorlat, 2016. november 21.

8:25–9:55, Déli tömb 4-206

18.1. Igazoljuk, hogy ha I intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos és injektív, akkor szigorúan monoton.

18.2. Igazoljuk az átviteli elvvel is, hogy ha f monoton növekvő az (a, b) intervallumon, akkor $\lim\limits_{a+0} f = \inf\limits_{(a,b)} f$ és $\lim\limits_{b-0} f = \sup\limits_{(a,b)} f$.

18.3. Milyen szakadása van a $\left\{\frac{1}{x}\right\}$, illetve az $x \cdot \left\{\frac{1}{x}\right\}$ függvénynek a 0-ban és az 1-ben?

18.4. (a) Lehet-e elsőfajú szakadási helyek torlódási pontja elsőfajú szakadási hely?
(b) Lehet-e másodfajú szakadási helyek torlódási pontja másodfajú szakadási hely?

18.5. Igazoljuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő és konvex, akkor f^{-1} konkáv az $(\inf f, \sup f)$ intervallumon.

18.6. Igazoljuk, hogy ha $a < c < d < b$, és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex, akkor $[c, d]$-n f Lipschitz.

18.7. Igazoljuk, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex, akkor $\lim\limits_{a+0} f$ és $\lim\limits_{b-0} f$ létezik és véges, továbbá $\lim\limits_{a+0} f \leq f(a)$ és $\lim\limits_{b-0} f \leq f(b)$.

18.8. Igazoljuk, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ konvex, akkor I felbontható két olyan intervallum uniójára, amelyeken f monoton.

Házi feladatok

18.9. Egy monoton $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értékkészlete sűrű $\mathbb{R}$-ben. Igazoljuk, hogy f mindenhol folytonos.

18.10. (a) Lehet-e másodfajú szakadási helyek torlódási pontja elsőfajú szakadási hely?
(b) Lehet-e elsőfajú szakadási helyek torlódási pontja másodfajú szakadási hely?

18.11. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy ha f konvex és szigorúan gyengén konvex, akkor szigorúan konvex.

18.12. Igaz-e, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, és $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, akkor $\lim\limits_{\infty} f = \infty$?

18.13. Igazoljuk, hogy ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ konvex, akkor f előáll két monoton növő függvény különbségeként.

Szorgalmi (írásban beadható, Pedál Medál Pirospontra beváltható) feladatok

PM18.1. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény elsőfajú szakadási helyeinek halmaza megszámlálható.

PM18.2. (a) Igazoljuk, hogy ha I intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ gyengén konvex és felülről korlátos, akkor konvex.
(b) Igaz-e, hogy ha I intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ gyengén konvex és alulról korlátos, akkor konvex?

A korábbi feladatsorok itt: http://kosgeza.web.elte.hu/oktatas/2016osz-an1i/
További gyakorló feladatok: http://mat-peldatar.elte.hu